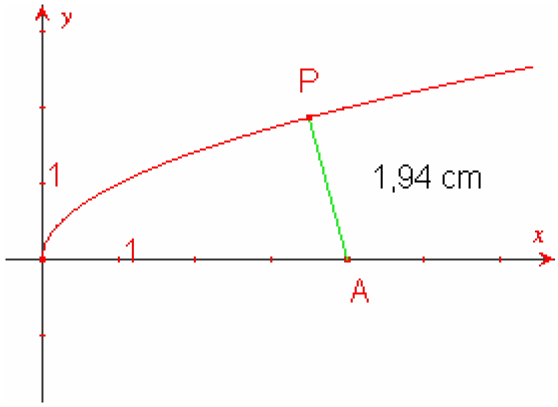
Classe 5B – Compito di matematica – 13 marzo 2004

Argomento del test: Problemi di massimo e minimo (intr.), grafici, integrali di Riemann

Esercizio 1: Trovare il punto della curva $y = \sqrt{x}$ più vicino al punto (4,0).

Soluzione Considerato un punto P generico della curva, di coordinate $(s, \sqrt{s})$, la sua distanza da (4,0) è data da $\sqrt{(s-4)^2 + (\sqrt{s}-0)^2} = \sqrt{s^2 - 7s + 16}$. La derivata è $\dfrac{2s-7}{2\sqrt{s^2-7s+16}}$. Essa è positiva per s>7/2 e negativa per s<7/2. Per s=7/2 si ha dunque il minimo richiesto.

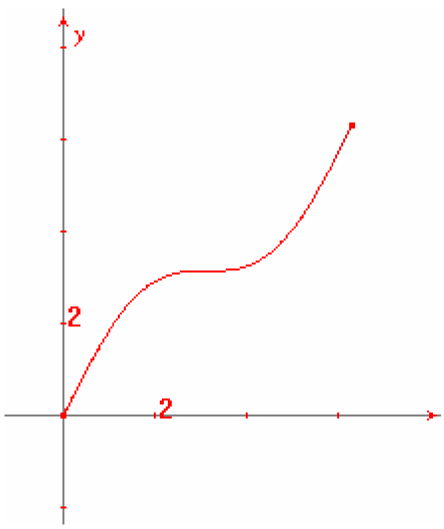
Si veda qui a lato la soluzione costruita con Cabri.



Esercizio 2: Tracciare il grafico della funzione $y = x + \sin x$, limitatamente all'intervallo [0,2π], determinando dominio, limiti e asintoti, derivata prima, massimi e minimi, derivata seconda, concavità e convessità, flessi.

Soluzione Nessun problema di dominio, né di asintoti. La derivate prima e seconda sono y'=1+cosx. y''=-sinx, il cui segno è banale. La funzione non ha massimi o minimi interni al dominio, raggiunge il suo minimo assoluto e il suo massimo assoluto agli estremi 0 e 2π. Ha un flesso a tangente orizzontale nel punto di ascissa π.

Si veda qui a lato il grafico costruito con Cabri.



Esercizio 3: Trovare $\int_{-1}^{3} x\,\mathrm{sgn}(x)dx$

Soluzione La funzione integranda si può scrivere anche così: $f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ x & x\geq 0\end{cases}$. L'integrale diventa allora banale, spezzandolo in due parti: $\int_{-1}^{0}(-x)dx+\int_{0}^{3}xdx=\cdots$

Esercizio 4: Calcolare $\lim_{x\to 1}\frac{\int_{1}^{x}\ln t}{\sin(x-1)}$

Soluzione Basta calcolare preventivamente l'integrale che sta al numeratore e poi fare i calcoli come al solito. Si ha: $\int_{1}^{x}\ln t=\left[t\ln t-t\right]_{1}^{x}=x\ln x-x+1$. Rimane allora da calcolare il limite seguente: $\lim_{x\to 1}\frac{x\ln x-x+1}{\sin(x-1)}$. Il limite si presenta nella forma indeterminata 0/0 e una applicazione della regola di l'Hôpital produce subito il risultato (0).