Classe 4B – Compito di matematica – 21 marzo 2002

Argomento del test: coniche e matrici, trasformazioni affini

Esercizio 1

Si consideri la seguente equazione di secondo grado in due incognite: $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$.

a. Utilizzando gli invarianti (lineare quadratico e cubico) si dica di che conica si tratta.

La matrice della conica è: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -8 \\ -1 & -8 & 13 \end{pmatrix}$. *Se ne deduce che I=5, δ=4, Δ=-16, IΔ<0. Da qui segue che la conica è un'ellisse reale.*

b. Se ne determini, se c'è, il centro utilizzando un opportuno sistema di equazioni in due incognite.

Si tratta di risolvere il sistema in due incognite $\begin{cases} x-1=0 \\ 4y-8=0 \end{cases}$. *Si ottiene banalmente C=(1,2).*

c. Si riduca la conica a forma canonica, controllando la validità dei risultati ottenuti ai punti precedenti.

La conica ridotta a forma canonica diventa: $\frac{(x-1)^2}{4}+(y-2)^2=1$, *equazione che conferma i risultati precedentemente ottenuti.*

d. Si consideri la seguente trasformazione del piano in sé: $\begin{cases} x=x'-y' \\ y=2x'+y' \end{cases}$ e si dica se si tratta di un'affinità, precisando anche se è, in particolare, una similitudine o una isometria.

Si tratta di un'affinità perché il suo discriminante è non nullo. Non è una similitudine né una isometria.

e. Si sottoponga la conica alla predetta trasformazione.

La conica trasformata (scrivendo x e y in luogo di x' e y') si trova immediatamente per sostituzione diretta e diventa: $17x^2+14xy+5y^2-34x-14y+13=0$.

f. Si dica, utilizzando gli invarianti (lineare quadratico e cubico) e senza ridurre l'equazione a forma canonica, di che tipo di conica si tratta.

La matrice della conica è: $\begin{pmatrix} 17 & 7 & -17 \\ 7 & 5 & -7 \\ -17 & -7 & 13 \end{pmatrix}$. *Gli invarianti sono: I=22, δ=36, Δ=-144, IΔ<0. Si deduce che la conica rimane un'ellisse.*

g. Si determini, se c'è, il nuovo centro.

Si tratta di risolvere il sistema: $\begin{cases} 17x+7y-17=0 \\ 7x+5y-7=0 \end{cases}$. *La sua soluzione è: C(1,0)*

h. Si controlli se l'immagine del centro della conica data coincide o no con il centro della conica trasformata.

L'immagine tramite la trasformazione data del punto (1,0) è proprio il punto (1,2).

Esercizio 2

Utilizzando opportunamente la teoria delle coniche, rappresentare il grafico della seguente funzione: $f(x)=\frac{x^2+\sqrt{3}}{x\sqrt{3}}$.

Il grafico della funzione data si può pensare come l'insieme delle soluzioni dell'equazione di secondo grado in due incognite: $xy\sqrt{3}=x^2+\sqrt{3}$, *ovvero* $x^2-xy\sqrt{3}+\sqrt{3}=0$. *Si tratta di una conica contenente il termine misto. Si può eseguire una rotazione degli assi* $\begin{cases} x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha \\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha \end{cases}$.

Per eliminare il termine misto deve essere $-2\cos\alpha\sin\alpha-\sqrt{3}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=0$. *Si trova facilmente* $\tan 2\alpha=-\sqrt{3}$, *ovvero* $\alpha=\frac{\pi}{3}$. *A questo punto si sostituisce e si trova la conica priva del termine misto:* $\frac{x^2}{2\sqrt{3}}+\frac{y^2}{-\frac{2\sqrt{3}}{3}}=1$. *Si tratta di un'iperbole che si disegna facilmente.*