Classe 4B – Compito di matematica – 10 ottobre 2002

Argomento del test: Introduzione al campo complesso

a. Sono dati i numeri complessi $z=-1+i \quad v=2-3i \quad w=1+2i$.

1. Provare che $z + v = v + z$.

no comment

2. Provare che $zv = vz$.

no comment

3. Provare che $z(v+w) = zv+zw$.

no comment

4. Calcolare il reciproco di z e verificare che il prodotto tra z e il suo reciproco vale 1.

Si ha $\frac{1}{-1+i}=\frac{-1-i}{1-i^2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$ *e successivamente* $(-1+i)\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)=1$

5. Scrivere z in forma trigonometrica.

Si ha $z=\left[\sqrt{2},\frac{3}{4}\pi\right]$.

6. Scrivere v e w in forma trigonometrica, approssimando l'angolo con due cifre decimali.

Per v si ha $\rho=\sqrt{13}, \quad \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin\theta=-\frac{3}{\sqrt{13}}$, *da cui si trova* $\theta \simeq 5.30$.

Per w si ha $\rho=\sqrt{5}, \quad \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$, *da cui si trova* $\theta \simeq 1.11$

7. Trovare le radici quadrate di z.

Si ha $\sqrt{z}=\left\{\sqrt{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{2}\right),\ k=0,1\right\}$, *da cui* $z_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{3}{8}\pi+i\sin\frac{3}{8}\pi\right)$ *e*

$z_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{11}{8}\pi+i\sin\frac{11}{8}\pi\right)$.

8. Trovare le radici cubiche di v, approssimando i valori che coinvolgono il seno e coseno dell'angolo con due cifre decimali.

Si ha $\sqrt[3]{2-3i} = \left\{ \sqrt[6]{13}\left(\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right)\right), k = 0,1,2 \right\}$, *da cui*
$z_0 \simeq \sqrt[6]{13}\left(\cos 1.77 + i\sin 1.77\right) \simeq \sqrt[6]{13}\left(-0.19 + i0.98\right)$,
$z_1 = \sqrt[6]{13}\left(-0.75 - i0.65\right)$, $z_2 = \sqrt[6]{13}\left(0.95 - i0.32\right)$

9. Calcolare z^3 usando la forma algebrica di z.

Si ha $(-1+i)^3 = (-1)^3 + 3(-1)^2 i + 3(-1)i^2 + i^3 = 2 + 2i$

10. Verificare che nella forma trigonometrica di z^3 l'angolo assume valore triplo di quello relativo al numero z.

L'angolo θ *relativo a* z^3 *vale* $\frac{\pi}{4}$*, che corrisponde al triplo di* $\frac{3}{4}\pi$ *, a meno di multipli di* 2π.

11. Calcolare v^3.

Si ha $(2-3i)^3 = 8 + 3(2)^2(-3i) + 3(2)(-3i)^2 + (-3i)^3 = -46 - 9i$

b. Risolvere la seguente equazione nell'incognita complessa z: $z^2 - iz + 7 = 0$

Si ha $z_{1,2} = \frac{i \pm \sqrt{-1-28}}{2} = \frac{i \pm i\sqrt{29}}{2}$