Classe 4B - Compito di matematica - 7 febbraio 2005

1. Quanti sono i numeri di 6 cifre, che cominciano con una cifra dispari e hanno almeno un'altra cifra dispari?

   Soluzione Intanto contiamo i numeri di 6 cifre che iniziano con una cifra dispari: ci sono 5 possibilità per il primo posto e 10 per ciascuno degli altri, in totale $5 \cdot 10^5$. Poi contiamo i numeri che hanno una cifra dispari al primo posto e solo cifre pari ai restanti: 5 possibilità al primo posto e 5 per ciascuno degli altri, in totale $5 \cdot 5^5$. La differenza tra questi due numeri mi dà il valore cercato: 484375.

2. Considerate le cifre $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, ne scegliamo 6 diverse, di cui due dispari. Quanti numeri si possono fare con tutte queste 6 cifre?

   Soluzione Si tratta di scegliere due cifre dispari tra le cinque possibili, cosa che si può fare in $\binom{5}{2}$ modi, e poi di scegliere 4 cifre pari tra le quattro disponibili, cosa che si può fare in $\binom{4}{4} = 1$ modo. A questo punto basta fare tutte le possibili permutazioni di questi 6 oggetti, che sono naturalmente in numero di $6!$. Il risultato finale si ottiene dal prodotto di questi tre numeri e vale 7200.

3. In quanti modi si possono collocare n palline indistinguibili in n celle numerate, in modo che esattamente 2 celle restino vuote?

   Soluzione Si devono innanzitutto scegliere, in $\binom{n}{2}$ modi diversi, le due celle da lasciare vuote; successivamente si collocano $n-2$ palline una per ognuna delle celle rimaste (cosa che si può ovviamente fare in un solo modo); infine si devono collocare 2 palline in $n-2$ celle. Quest'ultima operazione equivale a considerare le combinazioni con ripetizione di $n-2$ oggetti, di classe 2: $C^r_{n-2,2} = \binom{n-3}{2}$. Il risultato finale si ottiene dal prodotto di questi numeri: $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{4}$.

4. Provare l'uguaglianza $2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$.

   Soluzione Si tratta di una applicazione standard della formula del binomio di Newton $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{(n-1)}b^1 + \cdots + \binom{n}{n}a^0 b^n$, in cui basta porre $a = b = 1$.

5. Trovare il coefficiente di x^4 nello sviluppo di $\left(x - \frac{11}{\sqrt{x}}\right)^{10}$.

   Soluzione Si comincia con l'osservare che x^4 può venire, nello sviluppo del binomio, solo da $a^6 b^4$. Il suo coefficiente, che risulta positivo, è allora $\binom{10}{4} \cdot 11^4 = 3074610$.

Liceo Scientifico Grigoletti - prof. Luciano Battaia