Classe 3^aL – Compito di matematica – 11 marzo 2005

1. Si consideri il numero complesso $\left[\rho, \frac{2\pi}{3}\right]$.

   (a) Se ne trovi la forma algebrica.
   Risposta: $-\frac{\rho}{2} + i\frac{\rho\sqrt{3}}{2}$.

   (b) Si calcoli il suo quadrato, usando la forma algebrica.
   Risposta: $\frac{\rho^2}{4} - \frac{3\rho^2}{4} - i\frac{\rho^2\sqrt{3}}{2} = -\frac{\rho^2}{2} - i\frac{\rho^2\sqrt{3}}{2}$.

   (c) Si trovi la forma trigonometrica del numero ottenuto al punto 1b.
   Risposta: $\left[\rho^2, \frac{4\pi}{3}\right]$.

   (d) Si calcoli il quadrato del numero ottenuto al punto 1c usando la forma trigonometrica.
   Risposta: $\left[\rho^4, \frac{8\pi}{3}\right] = \left[\rho^4, \frac{2\pi}{3}\right]$.

2. Si consideri il numero complesso $\frac{1+i}{1-i}$.

   (a) Si trovino le forme trigonometriche del numeratore e del denominatore.
   Risposta: $1+i = \left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right]$, $1-i = \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$.

   (b) Si esegua il quoziente usando le forme trigonometriche trovate al punto 2a.
   Risposta: $\left[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right] / \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4}\right] = \left[1, \frac{\pi}{4} - \frac{7\pi}{4}\right] = \left[1, -\frac{3\pi}{2}\right] = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$.

   (c) Si esegua il quoziente usando la forma algebrica data nel testo.
   Risposta: $\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = \frac{1-1+2i}{2} = i$.

   (d) Si rappresenti nel piano di Gauss il quoziente ottenuto al punto 2c
   Risposta: Si tratta del vettore che congiunge l'origine con il punto $(0, 1)$.

   (e) Si dica se la rappresentazione ottenuta al punto 2d è in accordo con il risultato ottenuto al punto 2b, giustificando la risposta.
   Risposta: Si, perchè il vettore rappresentato ha modulo 1 e argomento $\frac{\pi}{2}$.

3. Si calcolino tutti i numeri $\sqrt[8]{i^4}$, esprimendo i risultati in forma algebrica.
   Risposta: Si noti intanto che non si può semplificare l'indice della radice con l'esponente del radicando, perchè altrimenti rimarrebbe una radice quadrata che ha solo due valori distinti, mentre una radice ottava ne ha otto. Si ottiene, innanzitutto, $i^4 = 1$, dopodiché si tratta di trovare le radici ottave di $1 = [1, 0]$. Tutte le radici richieste hanno modulo 1, mentre gli argomenti sono $\vartheta_k = \frac{2k\pi}{8} = \frac{k\pi}{4}$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$. La determinazione esplicita delle radici in forma algebrica è ora immediata: $\left\{\pm 1, \pm i, \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \pm i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$.

4. Si dica come sono situate, nel piano di Gauss, le radici decime di $1 = 1 + 0i$, giustificando la risposta.
   Risposta: Si ha $1 = [1, 0]$. Dunque le radici decime hanno tutte modulo 1, mentre l'argomento si ottiene dalla formula: $\vartheta_k = \frac{2k\pi}{10}$, con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. E' immediato concludere che le radici si trovano sui vertici del decagono regolare inscritto nella circonferenza di centro l'origine e raggio 1, avente un vertice in $(1, 0)$.

5. Si considerino i numeri complessi $1 + i\sqrt{3}$ e $\sqrt{3} + i$.

   (a) Si rappresentino entrambi i numeri nel piano di Gauss.
   Risposta: Entrambi i numeri hanno modulo 2; il primo ha argomento $\frac{\pi}{3}$, il secondo $\frac{\pi}{6}$.

   (b) Senza eseguire i calcoli, si rappresenti nel piano di Gauss il prodotto dei due numeri.
   Risposta: Il prodotto ha modulo 4 e argomento $\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}$.