Classe 3L - Compito di matematica - 8 febbraio 2005

1. Quanti sono gli anagrammi della parola Annamaria? Quanti sono gli anagrammi della stessa parola che cominciano per a?

   Soluzione Per la prima domanda basta calcolare le permutazioni di 9 oggetti (tanti quante sono le lettere della parola annamaria), di cui 4 uguali ad a, 2 uguali ad n e 1 ciascuno per m,r,i, ovvero il numero $P_9^{4,2,1,1,1} = \frac{9!}{4!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 7560$. Per la seconda domanda basta osservare che se si fissa la lettera a al primo posto, basterà calcolare le permutazioni delle 8 lettere restanti: si otterrà: $P_8^{3,2,1,1,1} = \frac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!} = 3360$.

2. In quanti modi si possono distribuire 10 palline identiche in quattro urne, in modo che nessuna urna resti vuota?

   Soluzione Bisogna intanto distribuire una pallina per urna. Successivamente basta distribuire le restanti 6 palline nelle 4 urne, nei $C^r_{4,6} = \binom{9}{6} = 84$ modi possibili.

3. Qual è il coefficiente di x^2 nello sviluppo di $\left(\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)^{10}$?

   Soluzione Intanto osserviamo che x^2 si ottiene dallo sviluppo del binomio $(a+b)^{10}$ in corrispondenza di $a^8b^2 = (\sqrt{x})^8 \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^2$. Il coefficiente richiesto è allora $\binom{10}{2} \cdot (3)^2 = 405$

4. Calcolare $(1-2i)^8$ semplificando il risultato.

   Soluzione Si deve applicare la formula del binomio di Newton $(a+b)^8 = \binom{8}{0}a^8 + \binom{8}{1}a^7b + \binom{8}{2}a^6b^2 + \binom{8}{3}a^5b^3 + \binom{8}{4}a^4b^4 + \binom{8}{5}a^3b^5 + \binom{8}{6}a^2b^6 + \binom{8}{7}ab^7 + \binom{8}{8}b^8$.

   Considerando i valori dei coefficienti binomiali avremo dunque: $(1-2i)^8 = 1 - 8\cdot 2i + 28\cdot(2i)^2 - 56\cdot(2i)^3 + 70\cdot(2i)^4 - 56\cdot(2i)^5 + 28\cdot(2i)^6 - 8\cdot(2i)^7 + (2i)^8$.

   Nel nostro caso dobbiamo tenere conto dei valori delle successive potenze di i: $i^0 = 1, i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1, i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1$.

   Otteniamo: $1 - 16i - 112 + 448i + 1120 - 1792i - 1792 + 1024i + 256 = -527 - 336i$.

5. Semplificare l'espressione $(1+i)^2 + \frac{2-3i}{\sqrt{2}-i}$.

   Soluzione Si ha, successivamente:

$$
\begin{aligned}
(1+i)^2 + \frac{2-3i}{\sqrt{2}-i} &= 1 + 2i + i^2 + \frac{(2-3i)(\sqrt{2}+i)}{(\sqrt{2}-i)(\sqrt{2}+i)} \\
&= 1 + 2i - 1 + \frac{2\sqrt{2} + 2i - 3i\sqrt{2} + 3}{2+1} \\
&= \frac{2\sqrt{2}+3}{3} + \frac{8-3\sqrt{2}}{3}i
\end{aligned}
$$

6. Semplificare $\frac{i}{(1-i)^2}$.

   Soluzione Si ha, successivamente:

$$\frac{i}{(1-i)^2} = \frac{i}{1-2i+i^2} = \frac{i}{1-2i-1} = \frac{i}{-2i} = -\frac{1}{2}$$

7. Semplificare $\frac{(1+i)(3-i)}{2-3i}$

   Soluzione Si ha, successivamente:

$$\begin{aligned}\frac{(1+i)(3-i)}{2-3i} &= \frac{3-i+3i-i^2}{2-3i} = \frac{(4+2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} \\ &= \frac{8+12i+4i+6i^2}{4+9} = \frac{2}{13} + \frac{16}{13}i\end{aligned}$$

Liceo Scientifico Grigoletti - prof. Luciano Battaia