Luciano Battaia

Osservazioni su primitive e integrali di Riemann

Primitive

Sia data una funzione $f: D \subset R \to R$; supporremo che il dominio D sia un intervallo o un'unione, finita o infinita, di intervalli. Si chiama **primitiva** della funzione f in D ogni funzione F tale che $F'(x) = f(x)$, per ogni $x \in D$. L'operatore "primitiva" si presenta dunque come l'inverso dell'operatore derivata, nel senso che a partire da una data funzione f si deve ricercare un'altra funzione di cui f sia la derivata.

È molto importante il fatto che l'uguaglianza $F'(x) = f(x)$ deve valere per ogni punto del dominio[1]. Se ci accontentassimo della validità di questa uguaglianza solo su alcuni punti del dominio, il concetto di primitiva non sarebbe di alcuna utilità. Si consideri per esempio la funzione $f(x)=x^2$; la funzione $F(x)=cosx$ gode della proprietà che $F'(0)=cos0=1=f(0)$, cioè la derivata di F coincide con f in un punto del dominio, ma è ovvio che F non è candidata ad essere primitiva di f.

Si noti che da quanto appena detto discende che, mentre ha senso parlare di derivata di una funzione in un punto, non ha alcun senso parlare di primitiva di una funzione in un punto.

È da segnalare il fatto che mentre con l'operatore di derivazione a partire da una funzione derivabile si ottiene un'unica funzione, con l'operatore primitiva a partire da una funzione si possono ottenere infinite funzioni. Per esempio se $f(x) = 2x$, tutte le funzioni del tipo $F(x) = x^2 + k$, qualunque sia il valore di k, sono primitive di f.

A questo proposito è opportuno riformulare, utilizzando il concetto di primitiva appena introdotto, una importante conseguenza del teorema di Lagrange.

Teorema 1: Se una funzione f è definita in un intervallo I, e se F_1 ed F_2 sono due primitive di f, la differenza F_1-F_2 è costante in I.

Ricordiamo anche, per l'importanza che avrà in seguito, il seguente:

Teorema 2: Una funzione che abbia discontinuità di prima specie (salti) in un intervallo I, non può avere primitive in I.

Chiariamo il contenuto di questi teoremi e l'essenzialità delle ipotesi con alcuni esempi.

Si consideri la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$, definita in $R \setminus \{0\}$. Le due funzioni $F_1(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 5 & x < 0 \\ \ln(x) + 7 & x > 0 \end{cases}$ ed $F_2(x) = \begin{cases} \ln(-x) + 1 & x < 0 \\ \ln(x) + 4 & x > 0 \end{cases}$ sono entrambe primitive di f, ma $F_1 - F_2 = \begin{cases} 4 & x < 0 \\ 3 & x > 0 \end{cases}$, che non è costante. Il motivo è da ricercarsi nel fatto che la funzione f non è definita su un intervallo.

[1] Si potrebbero dare anche definizioni "meno restrittive" di primitiva, che qui però non vogliamo trattare. Accenniamo solo a una tra le più diffuse: data un a funzione f definita in un intervallo I di R, si chiama primitiva di f ogni funzione F continua in I e tale che $F'(x)=f(x)$ per ogni x di I, eccettuato al più un'infinità numerabile di punti di I.

La funzione $signum(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$ non può avere primitive su tutto R, nel senso della definizione da noi data.

La funzione $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ può avere primitive in $R \setminus \{0\}$ (una può essere la funzione $F(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & x > 0 \end{cases}$), e questo perché, a differenza della funzione *signum*, il suo dominio non è un intervallo.

Il teorema 1 sopra citato ha la seguente importante conseguenza: *limitatamente alle funzioni definite su intervalli* è sufficiente determinare una sola primitiva di una funzione, in quanto tutte le altre si otterranno da essa aggiungendo una costante arbitraria.

L'insieme di tutte le primitive di una funzione si usa indicare con il simbolo $\int f(x)dx$. Per esempio, data la funzione $f(x) = 2x$, si scrive $\int (2x)dx = x^2 + k,\ k \in R$. Questo simbolo presenta alcuni inconvenienti ed è spesso interpretato in maniera logicamente scorretta, tanto che alcuni autori preferiscono sostituirlo con altri. Esso è comunque estesamente usato perché presenta alcuni vantaggi "tecnici", in particolare nell'applicazione del teorema del cambiamento di variabile[2].

Bisogna anche prestare attenzione ad interpretare correttamente alcune "tabelle di primitive" che si trovano sui testi. Per esempio la scrittura $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + k$ va interpretata nel seguente modo: data la funzione $f(x) = \dfrac{1}{x}$, se x>0 l'insieme delle sue primitive è $\{\ln(x) + k,\ k \in R\}$, mentre se x<0 l'insieme delle primitive è $\{\ln(-x) + k,\ k \in R\}$, su $R \setminus \{0\}$ l'insieme delle primitive è invece $\left\{ F_k(x) = \begin{cases} \ln(x) + k_1 & x > 0 \\ \ln(-x) + k_2 & x < 0 \end{cases},\ k_1 \in R,\ k_2 \in R \right\}$.

Il concetto di primitiva non presenta particolari difficoltà dal punto di vista teorico. Ben diverso è il problema tecnico della ricerca delle primitive di una funzione. Uno dei risultati del "calcolo integrale" è che ogni funzione continua su un intervallo ammette primitive, e quindi l'operatore "primitiva" è meno "esigente" dell'operatore derivazione, ma il problema è che mentre la derivata di una funzione elementare è **sempre** una funzione elementare, altrettanto non succede per le primitive. Tra gli esempi più importanti e storicamente più famosi citiamo le funzioni $g(x)=e^{-x^2}$ e $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$, che hanno primitive non elementari.

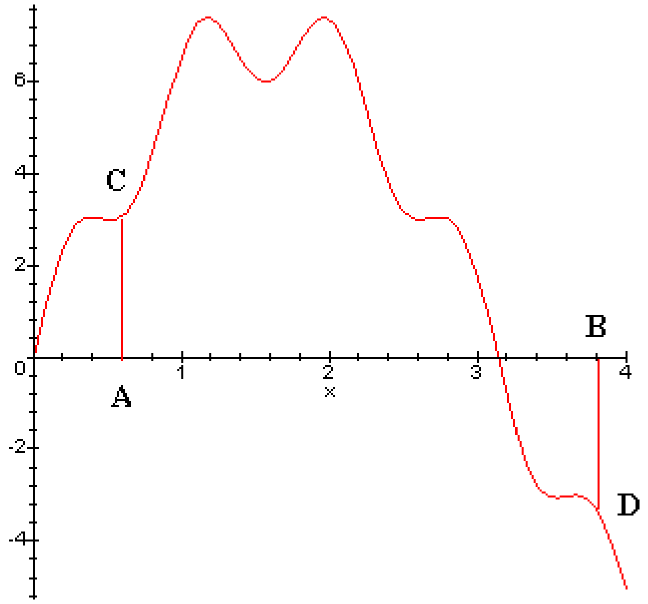
Integrale di Riemann

Un problema teoricamente molto diverso da quello della ricerca delle primitive di una funzione è quello del calcolo di aree di regioni piane limitate dal grafico di funzioni. È evidente che per trattare un simile problema occorre dare preventivamente una definizione di che cosa si intenda per area di una regione piana. Senza entrare nei dettagli, e limitandoci a considerare funzioni non troppo patologiche, l'idea che sta alla base del cosiddetto *Integrale di Riemann* è quello di generalizzare opportunamente il metodo che ha portato al concetto di area del cerchio.

---

[2] Vedi appunti su *Differenziali per funzioni reali di variabile reale*.

Consideriamo una funzione $f : D \subset R \to R$, ove *D* è un intervallo e la funzione f è **limitata**. Siano *a* e *b* due punti qualunque di *D*, ed *f(a)*, *f(b)* i rispettivi valori della funzione. Consideriamo i punti $A(a,0)$, $A(b,0)$, $C(a, f(a))$, $D(b, f(b))$ e il contorno "mistilineo" ACDBA, dove supponiamo che i "lati" siano orientati secondo l'ordine A-C-D-B-A. Questo contorno individua una regione piana, eventualmente intrecciata, costituita da parti che stanno "sopra" l'asse delle x e da parti che stanno "sotto" l'asse delle x.



Se la funzione è integrabile secondo Riemann e si attribuisce area positiva alle regioni piane il cui contorno è orientato in "senso antiorario" e area negativa a quelle il cui contorno è orientato in "senso orario", è immediato che $\int_a^b (f(x))dx$ è uguale alla somma delle aree delle regioni individuate come sopra detto, ciascuna presa con il suo segno.

Una funzione continua è sempre integrabile secondo Riemann, ma anche funzioni largamente discontinue lo sono[3]. Per esempio per la funzione *f(x)=signum(x)* si ha $\int_{-1}^{2} (signum(x))dx = 1$. Si noti che, come abbiamo più sopra osservato, la funzione *signum* è integrabile ma non può avere primitive sul tratto $[-1,2]$. Si può provare che se *f* è una funzione integrabile su un intervallo $[a,b]$ e si cambia il suo valore in un numero finito (o anche, seppure con qualche cautela, in un'infinità numerabile) di punti, la funzione ottenuta è ancora integrabile secondo Riemann e ha lo stesso integrale della funzione *f*. In sostanza l'integrale di Riemann si preoccupa dell'andamento "globale" di una funzione, a differenza di quello che succede per le derivate dove l'interesse è invece "locale".

Per una funzione non limitata il concetto di integrale di Riemann non si introduce nemmeno (si può, per queste funzioni, introdurre un altro concetto, quello di integrale improprio, ma è un'altra cosa e gode di proprietà abbastanza diverse da quelle di cui gode l'integrale di Riemann). Per le stesse funzioni invece

[3] Un importante e difficile teorema dovuto a Lebesgue caratterizza le funzioni integrabili secondo Riemann, in relazione alla "quantità" delle loro discontinuità. È difficile, a questo livello, anche l'enunciato di questo teorema, qui ci basta solo segnalare che anche se l'insieme dei punti di discontinuità è numerabilmente infinito la funzione è integrabile secondo Riemann.

il concetto di primitiva può avere un preciso significato (si pensi alla funzione $\frac{1}{x}$, di cui abbiamo parlato sopra).

Le osservazioni contenute nei due capoversi precedenti rendono evidente che, nonostante la grande somiglianza dei simboli utilizzati, i concetti di primitiva e di integrale secondo Riemann, sono diversi non solo nella sostanza (uno ha come effetto la generazione di un insieme di funzioni, l'altro un numero), ma anche per quanto riguarda le funzioni a cui si possono applicare.

Primitive e integrale di Riemann

I due concetti che abbiamo introdotto nei paragrafi precedenti sono, come già osservato, completamente diversi. Il ***Teorema fondamentale del calcolo integrale*** fornisce però un importante legame tra di essi e permette di ricondurre il calcolo di un'area a quello della ricerca di una primitiva. Per scrivere l'enunciato di questo teorema premettiamo la seguente definizione:

Sia data una funzione $f: D \subset R \to R$, ove D è un intervallo, e si supponga che f sia integrabile secondo Riemann in *D*. Sia *a* un punto generico fissato in *D* e si consideri un altro punto *x* di *D*. Se a è fissato, al variare di *x* in D l'$\int_a^x (f(t))dt$ dipende da *x*, cioè è una funzione di *x*, che si chiama ***funzione integrale di f, di punto iniziale a***, che possiamo indicare con $F_a(x)$.

Il teorema di Torricelli-Barrow afferma che:

Se c è un punto nell'intervallo $[a,x]$ oppure $[x,a]$ e f è continua in c, allora F_a è derivabile in c e si ha $F_a'(c)=f(c)$.

Ciò significa che se la funzione *f* è continua in tutto *D*, F_a è una primitiva di *f* in tutto *D*.

Da qui discende la nota regola di calcolo degli integrali di Riemann.

È molto importante osservare che se *f* è integrabile ma non continua non è affatto detto che abbia primitive (basta pensare alla funzione *signum*). Se una funzione è integrabile essa ha invece sicuramente funzioni integrali, le quali però non è detto che siano derivabili[4]. Al contrario una funzione può benissimo avere primitive senza essere integrabile[5].

---

[4] Si consideri per esempio la funzione *signum* e il punto iniziale 0. Si ha $\int_0^x (signum(t))dt = |x|$ e, come è noto, la funzione $|x|$ non è derivabile per x=0.

[5] Per convincersene si può provare a fare la derivata della funzione così definita: $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. Si ottiene una funzione che ha sicuramente primitive (la funzione *f* stessa), ma che non è integrabile in quanto non limitata.