Luciano BATTAIA

Problemi di continuità, derivabilità, integrabilità, per funzioni elementari

Grafici tracciabili per via elementare

Anno Scolastico 1998/99

1. Definizioni e prime osservazioni

Si dicono **elementari** le funzioni contenute nell'elenco che segue. Per ciascuna di esse il dominio naturale (dom) é indicato a lato.([1])

(1) f(x) = k *(funzione costante),* dom = **R**;

(2) $f(x) = p_n(x) = x^n$, $n \in Z$, *(potenza),* $\begin{cases} \text{dom} = \mathbf{R} \text{ se n} > 0 \\ \text{dom} = \mathbf{R} \setminus \{0\} \, se\ n \le 0 \end{cases}$ ([2]);

(3) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$, $n \in N$, *(polinomio di grado n),* dom = **R**;

(4) $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$,con *p(x)* e *q(x)* polinomi *(razionale fratta),* dom = **R**\{zeri del denominatore}.

(5) f(x) = senx *(seno),* dom = **R**;

(6) f(x) = cosx *(coseno),* dom = **R**;

(7) f(x) = tgx *(tangente),* dom = $\mathbf{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$;

(7a) f(x) = ctgx *(cotangente),* dom = $\mathbf{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$;

(8) $f(x) = \exp(x) = e^x$ *(esponenziale),* dom = **R**;

(9) $f(x) = \exp_a(x) = a^x$, $a>0$, *(esponenziale di base a),* dom = **R**;

(10) f(x) = lnx *(logaritmo naturale),* dom = $]0,+\infty[$;

(11) $f(x) = \log_a x$, $0<a<1 \vee a>1$, (*logaritmo di base a),* dom = $]0,+\infty[$;

(12) f(x) = arctgx *(arctangente),* dom = **R**;

(12a) f(x) = arcctgx *(arccotangente),* dom = **R**;

(13) f(x) = arcsenx *(arcseno),* dom = [-1,1];

(14) f(x) = arccosx *(arccoseno),* dom = [-1,1];

(15) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Z}$, *(potenza con esponente non intero),* $\begin{cases} \text{dom} = [0,+\infty[\text{ se } \alpha > 0 \\ \text{dom} =]0,+\infty[\text{ se } \alpha < 0 \end{cases}$;

(16) $f(x) = \sqrt[n]{x}$, $n \in N$, $n \ge 2$, *(radice n-esima),* $\begin{cases} \text{dom} = \mathbf{R} \text{ se n dispari} \\ \text{dom} = [0,+\infty[\text{ se n pari} \end{cases}$.

Sono inoltre da considerarsi elementari tutte le funzioni che si ottengono mediante le seguenti operazioni eseguite in numero finito e in qualunque ordine su queste funzioni:([3])

(17) operazione algebriche (somme, prodotti, quozienti);

(18) operazioni di composizione.

Tra le funzioni che si ottengono mediante composizione segnaliamo, per la sua importanza, la:

---

[1] Nel seguito **R** indicherà i numeri reali, **Q** i numeri razionali, **Z** gli interi relativi e **N** i naturali (compreso lo zero). Useremo i termini positivo e negativo nel senso, rispettivamente, di ≥ 0 e ≤ 0, i termini strettamente positivo e strettamente negativo nel senso, rispettivamente, di >0 e <0. Se A é un sottoinsieme di **R**, DA indicherà il derivato di A, cioè l'insieme dei punti di accumulazione di A. Quando parleremo di "funzione" intenderemo sempre una funzione reale di variabile reale e il dominio, se non precisato, sarà quello naturale.

[2] La funzione $p_0(x)$ non è ovviamente definita per x=0; poiché però essa assume costantemente il valore 1 per $x \neq 0$, di solito se ne prolunga il dominio fino a comprendere lo zero, ponendo $p_0(0)=1$, senza che questo implichi che $0^0=1$.

[3] Tra le operazioni utilizzate per costruire funzioni elementari ho di proposito escluso la operazione di inversione delle funzioni. Questa scelta é dettata dalla volontà di avere un insieme di funzioni continue nel loro dominio naturale ed é noto che l'inversa di una funzione continua può non essere continua, se il dominio non é un intervallo.

(19) f(x) = $\sqrt{x^2}$ = |x| *(modulo o valore assoluto),* dom = **R**.

L'elenco proposto é, da un lato, di gran lunga sovrabbondante e contiene numerose ripetizioni, dall'altro non contiene tutte le funzioni normalmente considerate elementari (per esempio le funzioni iperboliche): in ogni caso non vale la pena di andare alla ricerca del migliore elenco possibile, in quanto il problema non riveste una grande importanza. A seconda delle necessità applicative l'elenco può essere opportunamente ampliato o ridotto.

Occorre prestare molta attenzione alle "sorprese" che si ottengono in alcuni casi, per quanto riguarda il dominio, applicando l'operazione di composizione tra funzioni elementari. Le funzioni 1-16 dell'elenco hanno tutte come dominio R o un'unione di intervalli di R, le composte possono avere domini naturali molto più complessi. I problemi sorgono quando tra le funzioni componenti sono presenti le radici, le potenze ad esponente non intero e le funzioni arcsen e arccos. Verifichiamo questo fatto su alcuni esempi. (dom indica sempre il dominio naturale).

i) f(x) = $\sqrt{x^2(x-1}$ dom = $\{0\} \cup [1,+\infty[$;

ii) f(x) = arcsenx(x^2+1) dom = {0};

iii) f(x) = $\sqrt{\operatorname{sen} x - 1}$ dom = $\left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathrm{Z}\right\}$;

iv) f(x) = $\sqrt{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{x} - 1}$ dom = $\left\{\frac{2}{\pm\pi + 4k\pi}, k \in \mathbf{Z}\right\}$;

v) f(x) = $\sqrt{\left(sin\frac{1}{x} - 1\right)\left(1 - x^2\right)}$ dom = $]-\infty,-1] \cup \left\{\frac{2}{\pi + 4k\pi}, k \in \mathbf{Z}\right\} \cup [1,+\infty[$;

vi) f(x) = x^x dom= $\{x \in \mathbf{Z}, x < 0\} \cup \,]0,+\infty[$.

In generale comunque, quando si considerano funzioni definite da espressioni in cui compaiono potenze di base ed esponente variabile, non si perde l'essenziale se si rinuncia a considerare i valori di x che rendono negativa la base; questo rende possibile scrivere una funzione del tipo $f(x)^{g(x)}$ nella forma, molto più comoda da maneggiare, $e^{g(x)\ln[f(x)]}$.

Si possono ora dire **elementari a tratti**[4] le funzioni $f:(A \subset \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ con le seguenti caratteristiche:

•) il dominio é costituito da un'unione (finita o al massimo costituita da un'infinità numerabile) di intervalli (comprendenti o no uno o entrambi gli estremi) a due a due disgiunti o aventi al massimo in comune un estremo;

••) la restrizione della funzione all'interno di ciascuno di questi intervalli coincide con una delle funzioni elementari sopra considerate.

Tra le funzioni di questo tipo sono di grande importanza le seguenti:

(20) f(x) = sgn(x) = $\begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ *(funzione segno)*

(21) f(x) = [x] *(funzione parte intera)*, definita nel seguente modo: per ogni x∈R, [x] é il massimo intero n≤x. (Per esempio [2.3] = 2; [-3.4] = -4).

(22) f(x) = x - [x] = mant(x) *(funzione mantissa).* (Per esempio mant(2.3) = 2.3 - 2 = 0.3; mant(-3.6) = -3.6 - (-4) = 0.4).

Non é sempre agevole decidere se una funzione é "solo elementare a tratti" o se é "effettivamente elementare". In ogni caso la questione non é praticamente di nessun interesse per

---

4 Questa nomenclatura non é universale, é solo comoda per trattare un gran numero di problemi che capitano nello studio di funzioni.

cui non ce ne occuperemo. Facciamo solo un esempio: $f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$, che é sicuramente elementare a tratti sulla base della definizione, é anche elementare perché coincide con la funzione $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$.

2. Continuità

Ricordiamo che se f è una funzione con dominio $A\subset\mathbf{R}$, e x_0 é un punto di DA, x_0 si dice **singolare** (o di **discontinuità**) per f se é verificata una delle due possibilità seguenti:

- $x_0\in DA\setminus A$ (cioè x_0 é di accumulazione per A ma non appartiene ad A);
- $x_0\in DA\cap A$, ma $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ (cioè f non é continua in x_0).

Il nome più usato per questo tipo di punti é "punti di discontinuità", ma tale nome ci pare improprio in quanto "discontinuo" dovrebbe essere usato nel senso di "non continuo": se però $x_0\in DA\setminus A$, per il punto x_0 il concetto di continuità, e quindi tanto meno quello di discontinuità, non si può nemmeno porre. Poiché però la maggioranza fa legge, possiamo tranquillamente adeguarci e usare il nome "punto di discontinuità", tenendo sempre presente che si tratta di una locuzione quantomeno impropria. Si noti per esempio che la funzione $f(x)=\dfrac{sinx}{x}$ ha in 0 un punto di discontinuità (in quanto $0\in DA\setminus A$), ma non ha senso dire che in 0 non é continua, perché 0 non sta nel dominio.

Per quanto riguarda la classificazione (che non é universale) delle discontinuità ci atterremo alla seguente:

- x_0 una **singolarità (discontinuità) eliminabile** se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lambda$ (con $\lambda\in R$, cioè se il limite esiste finito). In questo caso, posto $g(x)=\begin{cases} f(x) & x\neq x_0 \\ \lambda & x=x_0 \end{cases}$, si ottiene una funzione che differisce da f solo per il valore in x_0 o per il fatto che ha un punto in più (x_0 appunto) nel dominio.
- x_0 é una **singolarità (discontinuità) di prima specie** (o **salto**) se si possono calcolare sia il limite destro che sinistro in x_0 e detti limiti esistono entrambi finiti e diversi; la differenza tra il limite destro e sinistro si usa chiamare salto di discontinuità.
- x_0 é una **singolarità (discontinuità) di seconda specie** in tutti gli altri casi.

Dai teoremi sulle funzioni continue segue che le funzioni elementari sono continue in tutto il loro dominio e possono solo presentare singolarità in corrispondenza di punti $\in DA\setminus A$. Per quanto riguarda le funzioni elementari a tratti esse sono ovviamente continue all'interno degli intervalli in cui si può suddividere il dominio, in quanto in un opportuno intorno di tutti i punti di questo tipo la funzione coincide con una funzione elementare ed é quindi continua, potrebbero invece non essere continue, o comunque presentare singolarità, agli estremi di questi intervalli. A differenza delle funzioni elementari possono quindi presentare singolarità anche in punti di $DA\cap A$.

Per esempio la funzione *sgn(x)* non é continua in 0 e ha ivi una singolarità di prima specie, con salto = 2. Le funzioni [x] e mant(x) non sono continue e presentano una singolarità di prima specie, con salto = 1, in tutti i punti interi.

Consideriamo ora qualche esercizio tipico su questo problema.

- Sia f(x) = $\begin{cases} a\cos x + b & x \le 0 \\ -x+3 & 0<x<2 \\ ax^2+bx & x \ge 2 \end{cases}$, con a e b reali. Si chiede di determinare, se possibile, i numeri a e b in modo che f sia ovunque continua. Negli intervalli]-∞,0[,]0,2[,]2,+∞[la funzione é continua, in quanto la sua restrizione a ciascuno di questi intervalli coincide con una funzione elementare. Affinché sia continua in x=0 occorre che $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = a+b$. Per calcolare questo limite é opportuno distinguere il calcolo in limite destro e limite sinistro. Per il calcolo del primo basta osservare che esso é influenzato solo dai valori che f assume a destra di 0, "abbastanza vicino a zero", e non ha alcun interesse il valore che f assume in zero. Si ha allora $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}(-x+3) = 3$. Analogo discorso per il limite sinistro, ove si ottiene $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(a\cos x + b) = a+b$. La funzione é continua in zero se e solo se 3=a+b. Per il punto x=2 si ha, in modo perfettamente analogo, f(2)=4a+2b, $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}(ax^2+bx) = 4a+2b$, $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(-x+3) = 1$. La funzione é continua in 2 se e solo se 4a+2b=1. Combinando i risultati trovati la funzione é ovunque continua se e solo se $a = -\frac{5}{2} \wedge b = \frac{11}{2}$.
- Sia $f(x) = \begin{cases} x^2+2ax & x \ne 1 \\ a^2+1 & x=1 \end{cases}$, con a∈**R**. Si determini, se possibile, il valore di a affinché f sia ovunque continua. In]-∞,1[∪]1,+∞[la funzione é continua per i soliti motivi. Per il punto 1 calcoliamo il limite: $\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x^2+2ax) = 1+2a$ (si noti come, al solito, nel calcolo del limite il valore di f in 1 non ha alcun interesse). La funzione sarà continua solo se f(1) = 1+2a, cioè $a^2+1=1+2a$, da cui segue a=0 ∨ a=2.
-

3. Derivabilità

Dai teoremi sulle derivate segue che:

- le funzioni 1-12a sono derivabili in tutti i punti del loro dominio([5]);
- le funzioni arcsen e arccos sono derivabili in]-1,1[mentre hanno derivate destra (in -1) e sinistra (in 1) infinite (rispettivamente -∞ per arccos e +∞ per arcsen);
- le funzioni potenza ad esponente reale sono derivabili in]0,+∞[per ogni α, hanno derivata destra anche in 0 se α>1, hanno derivata destra +∞ in 0 se 0<α<1;
- le funzioni radici n-esime sono derivabili nel loro dominio escluso il punto 0 e precisamente se n é dispari hanno in 0 derivata +∞, se n é pari hanno in zero solo la derivata destra +∞.

Si noti come tutte le funzioni indicate, eccetto le radici n-esime con n dispari, sono derivabili nei punti interni al dominio, possono non esserlo nei punti di frontiera del dominio (nel caso che tali punti stiano nel dominio).

Per quanto riguarda le funzioni ottenute con operazioni algebriche e di composizione bisogna prestare molta attenzione quando queste operazioni coinvolgono le funzioni arcsen, arccos, potenze

---

[5] Si noti che la formula di derivazione per le potenze ad esponente naturale >0 $\left[(x^n)' = nx^{n-1}\right]$ deve essere applicata con cautela quando n=1. In questo caso si ha (x)' = 1 per ogni x, mentre la formula sopra ricordata non ha senso nel punto 0. In ogni caso la questione non é di grande importanza ed é sufficiente un po' di attenzione per non commettere errori.

ad esponente reale e radici n-esime, sia perché il dominio (come già osservato) può contenere punti isolati, nei quali il concetto di derivata non ha senso, sia perché i teoremi sulle derivate non sono applicabili.

In ogni caso é da segnalare il fatto che la derivata di una funzione elementare é ancora una funzione elementare (anche se il dominio naturale della funzione derivata può essere un sottoinsieme proprio del dominio naturale della funzione).

Tra le funzioni non ovunque derivabili, é molto importante la funzione modulo f(x) = |x|, composta delle funzioni g(x)=x^2 e h(x)=$\sqrt{x}$: come é noto essa non é derivabile in 0 dove presenta un punto angoloso.

Per quanto riguarda le funzioni elementari a tratti, all'interno degli intervalli in cui si scinde il dominio ci si comporterà come con le funzioni elementari, sugli estremi occorrerà un'analisi specifica con il calcolo esplicito del limite del rapporto incrementale.

Consideriamo il seguente esempio: $f(x)=\begin{cases} 2x & x\le 2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$. E' immediato che la funzione é ovunque continua, per cui ha senso porsi il problema della derivabilità.

a) Se x<2 la funzione coincide con g(x)=2x, che é derivabile e ha derivata 2;
b) se x>2 la funzione coincide con x^2, che é derivabile e ha derivata 2x;
c) se x=2 occorre il calcolo esplicito del rapporto incrementale. Per i motivi già visti trattando della continuità conviene dividere il calcolo in limite destro e sinistro. Si ha: $\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=4$; $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2x-4}{x-2}=2$. Pertanto la funzione non é derivabile in 2 e si conclude che: $f'(x)=\begin{cases} 2 & x<2 \\ 2x & x>2 \\ \nexists & x=2 \end{cases}$.

Sono molto utili i seguenti teoremi (il secondo ha importanza anche per una questione legata alle primitive che vedremo più avanti):

"Teorema sul limite della derivata per funzioni continue": Sia f(x) una funzione continua in un intervallo I e derivabile all'interno, escluso al più un punto x_0; se esiste finito $\lim_{x\to x_0} f'(x)$, allora esiste anche *f'(x₀)* e si ha *f'(x₀)* = $\lim_{x\to x_0} f'(x)$.

"Proprietà delle funzioni derivabili in un intervallo": Se *f(x)* é una funzione derivabile in un intervallo]a,b[, allora la sua derivata può avere solo discontinuità di seconda specie in]a,b[.

In pratica si può procedere così: data una funzione *continua* in un intervallo, se sussistono problemi relativi alla derivabilità in un solo punto x_0, si calcolano le derivate per x> x_0 e per x< x_0; si calcolano poi i limiti di queste derivate (rispettivamente destro e sinistro). Se i limiti esistono finiti ed uguali la funzione é derivabile, se essi sono finiti e diversi la funzione non é derivabile ed ha un punto angoloso; altrimenti occorre procedere al calcolo del limite del rapporto incrementale per verificare la derivabilità o meno. In ogni caso il calcolo del limite del rapporto incrementale é sempre la strada più sicura per controllare la derivabilità, solo che spesso é molto più semplice e veloce procedere come sopra indicato.

Riprendiamo in esame un caso già trattato, $f(x)=\begin{cases} 2x & x\le 2 \\ x^2 & x>2 \end{cases}$. Si ha, facilmente, $f'(x)=\begin{cases} 2 & x<2 \\ 2x & x>2 \end{cases}$. Essendo $\lim_{x\to 2^-} f'(x)=2$, $\lim_{x\to 2^+} f'(x)=4$, la f non é derivabile in 2, come già visto.

Sia ora $f(x)=\begin{cases} x^2 sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$. La funzione é continua su tutto il dominio e si ha, per x≠0, $f'(x)=2xsin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$; poiché $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ non esiste, i teoremi precedenti non permettono di concludere nulla derivabilità. Calcoliamo allora direttamente il limite del rapporto incrementale: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 sin\frac{1}{x}-0}{x-0}=0$. La funzione é quindi derivabile e la sua derivata in 0 vale 0.

Come ulteriore esempio di esercizio tipico sulla derivabilità, consideriamo il seguente: sia $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 2 \\ ax+b & x>2 \end{cases}$, con a, b $\in \mathbf{R}$; si chiede di trovare, se possibile, i due numeri a e b in modo tale che la funzione sia ovunque derivabile. Poiché una funzione non continua non é derivabile, esaminiamo prima le eventuali condizioni per la continuità. Per ogni x≠2 la funzione é continua per i soliti motivi (in un opportuno intorno di un punto di questo tipo la funzione é elementare). Si ha poi f(2) = 4, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-} x^2=4$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(ax+b)=2a+b$; la funzione é dunque continua anche in 2 se e solo se 4=2a+b. La funzione é ovviamente derivabile per x≠2 (per gli stessi motivi per cui é continua) e si ha $f'(x)=\begin{cases} 2x & x<2 \\ a & x>2 \end{cases}$. Per controllare la derivabilità in 2 si può calcolare il limite del rapporto incrementale (*che é la strada maestra*) o calcolare il limite della derivata (con le precauzioni già segnalate). Si ha $\lim\limits_{x\to 2^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} 2x=4$, $\lim\limits_{x\to 2^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} a=a$; la funzione é allora derivabile in 2 se e solo se a=4. Se ne deduce che la funzione é continua e derivabile in tutto il suo dominio se e solo se a=4 $\wedge$ 2a+b=4, cioè a=4 $\wedge$ b=-4.

4. Primitive e integrali definiti

Le funzioni elementari, come già osservato, sono continue nel loro dominio naturale e pertanto, se consideriamo la loro restrizione ad un qualunque intervallo I contenuto nel dominio, avranno in I infinite primitive([6]) che, in base al noto corollario del teorema di Lagrange, differiscono tra loro per una costante.

E' molto importante ricordare il fatto che quest'ultima proprietà vale, in generale, solo se si considera la restrizione delle funzioni considerate ad un intervallo contenuto nel dominio naturale, e non a tutto il dominio naturale. Consideriamo per esempio la funzione $f(x)=\dfrac{1}{x}$ e le due funzioni: $F(x)=\begin{cases} \ln(-x)+2 & x<0 \\ \ln(x)+3 & x>0 \end{cases}$, $G(x)=\ln|x|$. E' immediato che sia F che G sono primitive di f, ma la loro differenza è $F(x)-G(x)=\begin{cases} 2 & x<0 \\ 3 & x>0 \end{cases}$, che non é costante.

---

[6] Ricordiamo che si dice primitiva di una funzione f, in un intervallo I, ogni funzione F derivabile, tale che F'(x)=f(x) **per ogni** x di I. Si presti particolare attenzione al fatto che si è richiesto che la uguaglianza precedente deve valere per ogni x: se così non fosse il concetto stesso di primitiva diventerebbe banale. La definizione di primitiva può anche essere data in maniera meno restrittiva (consentendo anche primitive continue ma non sempre derivabili), ma la cosa esula dal nostro contesto.

Le “tabelle di primitive” vanno lette sempre tenendo presente questo fatto. Per esempio la nota formula $\int \frac{1}{x} = \ln|x| + c$ é valida solo se si considera, separatamente, x>0 oppure x<0.

E’ importante, dal punto di vista delle applicazioni, il fatto che, mentre le derivate di funzioni elementari sono sempre elementari, ciò non accade per le primitive. Esempi classici sono le funzioni $f(x) = e^{-x^2}$, $g(x) = \frac{sinx}{x}$. L’uso delle primitive é dunque una tecnica per costruire funzioni non elementari.

Come già osservato le funzioni continue (in un intervallo) hanno sempre primitive, ma possono avere primitive anche le funzioni non continue. Ci interessa segnalare in particolare che anche funzioni non limitate possono avere primitive. Per esempio si consideri la funzione $F(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ e se ne calcoli la derivata con le regole già viste. Si ottiene $F'(x) = f(x) = \begin{cases} 2x\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} sin\frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. La funzione f(x) non é limitata ,ma ovviamente la funzione *F(x)* é, per costruzione, una sua primitiva. Si noti che, invece, una funzione non limitata non può essere integrabile secondo Riemann.

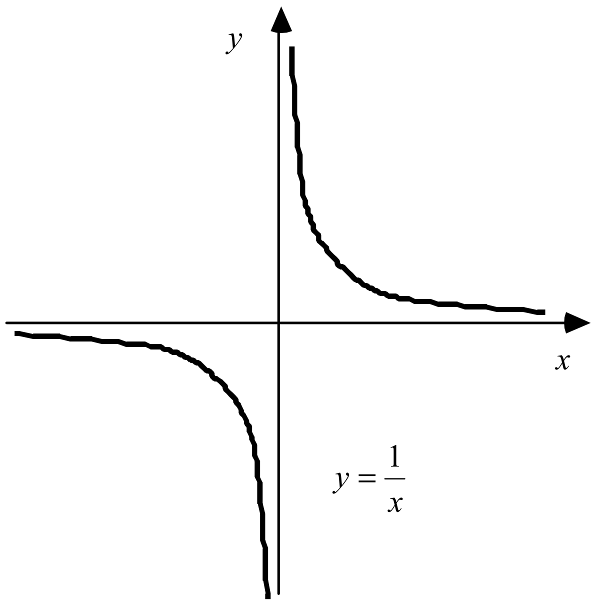
Come é noto possono essere integrabili secondo Riemann anche funzioni ampiamente discontinue, con qualunque tipo di discontinuità (purché limitate), mentre le funzioni con discontinuità di prima specie non possono avere primitive, nel senso da noi qui considerato. Queste osservazioni sono fatte per sottolineare il fatto che il problema del calcolo di un integrale e quello delle primitive non sono identici, anche se, ma solo per le funzioni continue, il teorema di Torricelli riduce il primo problema al secondo.

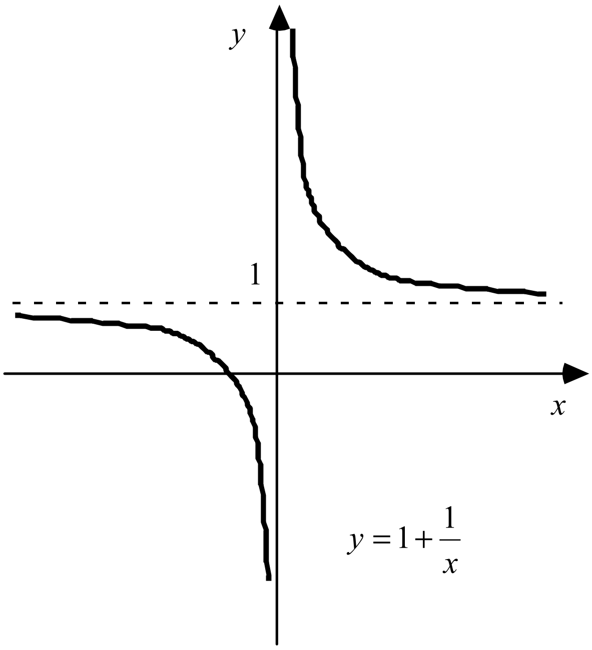
5. Considerazioni sui grafici deducibili per via elementare.

In molti casi il grafico di una funzione può essere dedotto per via elementare da quello di altre funzioni, noto per altra via, almeno limitatamente alle caratteristiche essenziali. Questo é vero in particolare per le funzioni elementari. Considereremo alcuni casi significativi e limiteremo le nostre considerazioni alla determinazione del dominio, eventuali asintoti orizzontali o verticali, crescenza e decrescenza, massimi e minimi relativi.

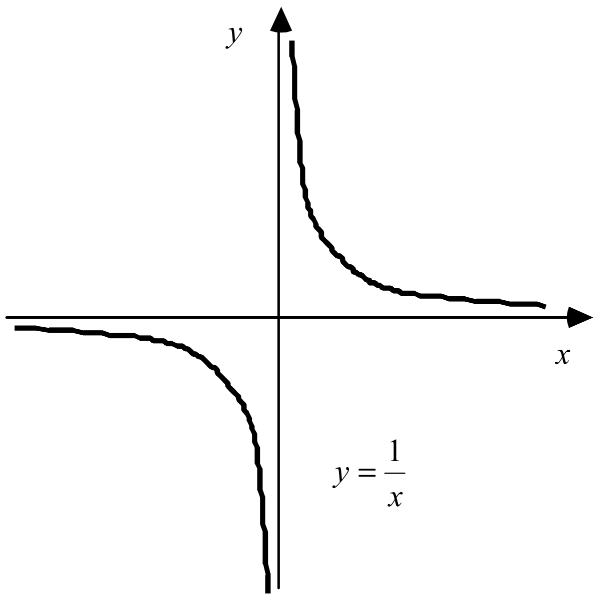
Supponiamo dunque noto il grafico di una certa funzione *y=f(x)* e consideriamo il problema di ricavare da esso i grafici di altre funzioni.

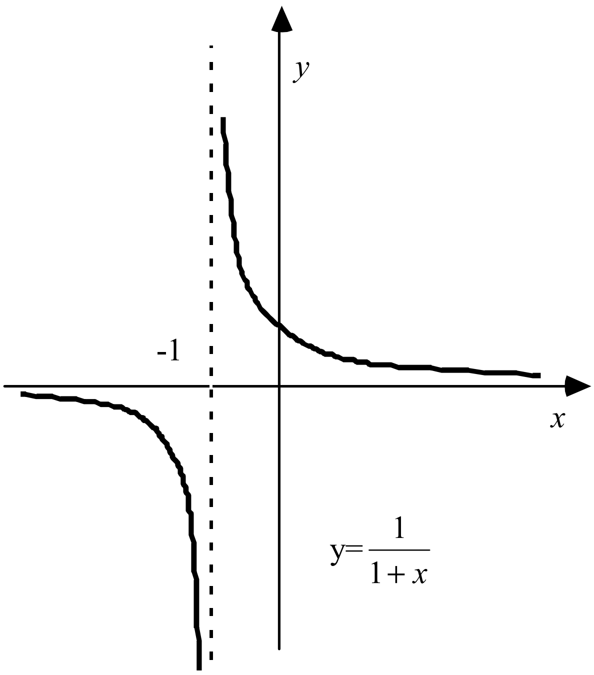
1) y = f(x)+k. Si tratta semplicemente di traslare rigidamente il grafico di f(x), verso l’alto se k>0, verso il basso se k<0. Esempio: $y = \frac{x+1}{x} = \frac{1}{x} + 1$.



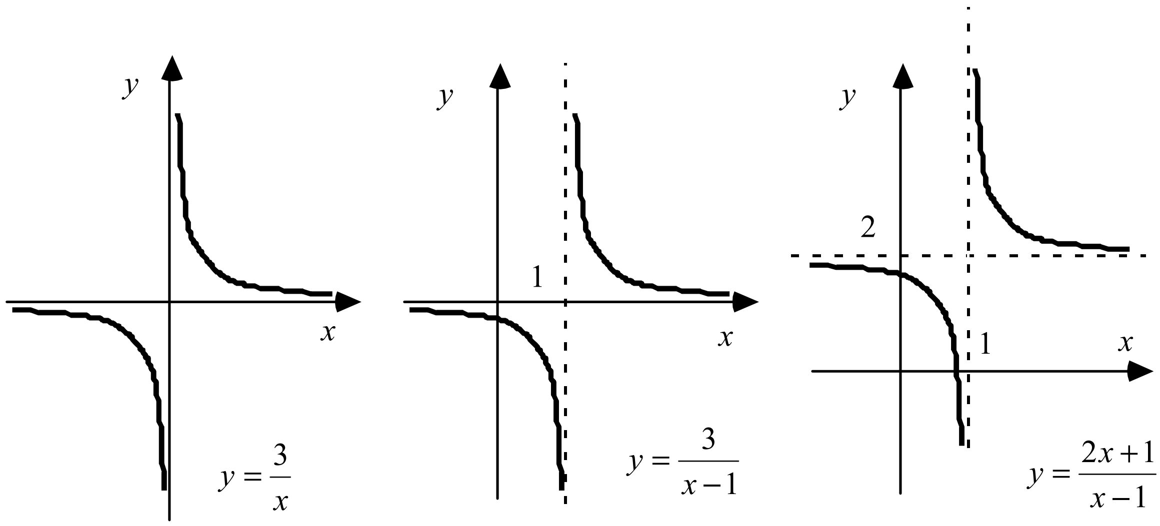


2) **y=f(x+k)**. Posto *X=x+k*, *Y=y*, si ottiene *Y=f(X),* cioè nel sistema XY il grafico é quello già noto. Si tratta dunque solo di operare una traslazione rigida del grafico, verso destra se k<0, verso sinistra se k>0. È ovvio che, in alternativa, si può traslare l'asse delle y in senso contrario. Esempio: $y = \frac{1}{1+x}$, che si può dedurre dal grafico di $y = \frac{1}{x}$.

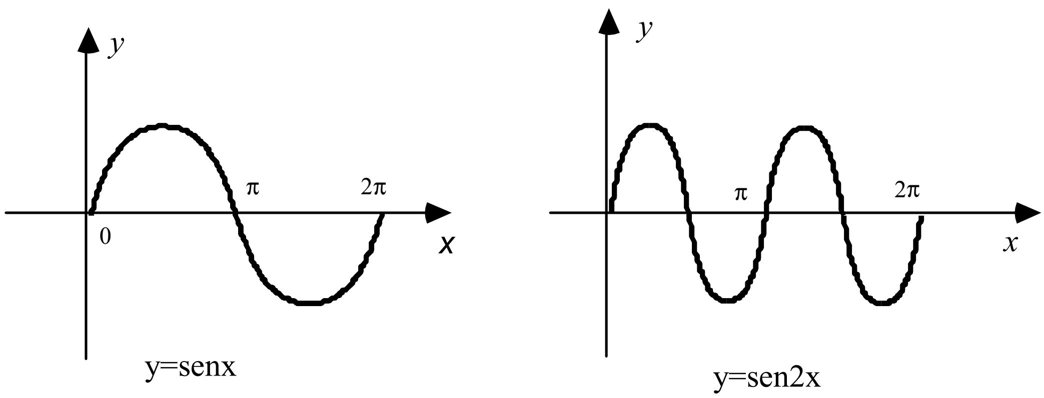


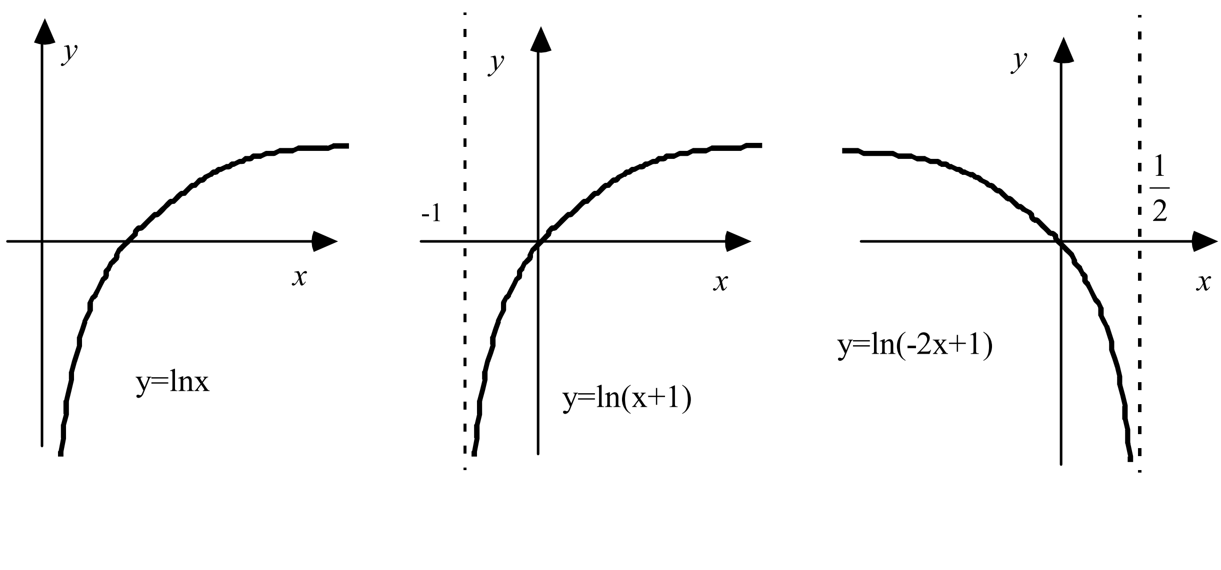


Si può naturalmente considerare la combinazione delle due traslazioni, come nel seguente esempio: $y = \frac{2x+1}{x-1} = 2 + \frac{3}{x-1}$, che si può ottenere tracciando prima il grafico di $y = \frac{3}{x}$, ricavando poi quello di $y = \frac{3}{x-1}$ e infine quello richiesto.

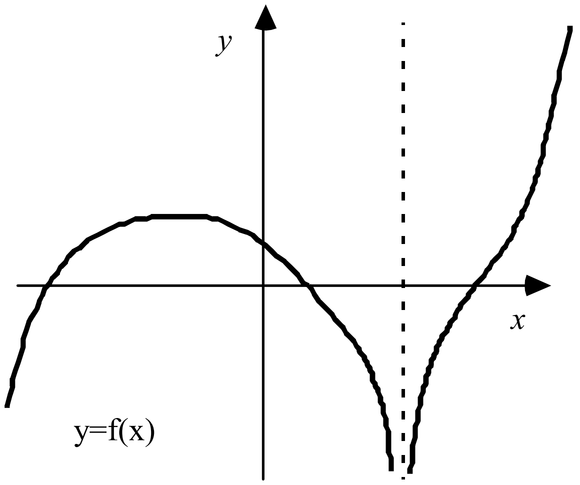


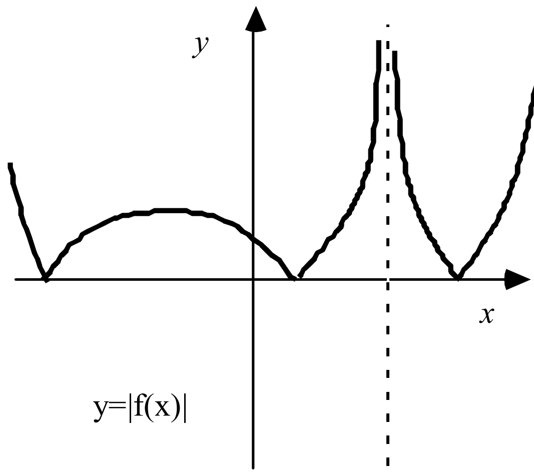
3) y=f(kx). Posto *X=kx, Y*=y, si ottiene *Y=f(X)*, cioè il grafico già noto. Se k>0 si tratta dunque solo di cambiare, limitatamente all'asse x, l'unità di misura, mettendo $\frac{1}{k}$ al posto di 1: si ottiene uno "schiacciamento" se k>1, una "dilatazione" se k<1. Se k<0 occorre anche invertire il verso dell'asse x, oppure ruotare il grafico attorno all'asse y, di 180°. Il primo dei due esempi riportati sotto si riferisce a *y=sen2x*, dedotto da *y=senx*, e il secondo a *y=ln(–2x+1)*, dedotto da *y=ln(x+1)*, a sua volta dedotto da *y=lnx*. Considerazioni analoghe valgono per **<u>y=kf(x)</u>** (k>0), nel qual caso si tratta solo di cambiare l'unità di misura sull'asse delle y, mettendo k al posto di 1.



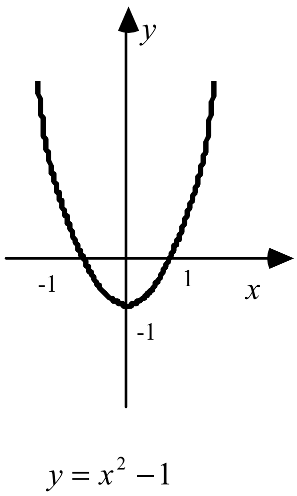


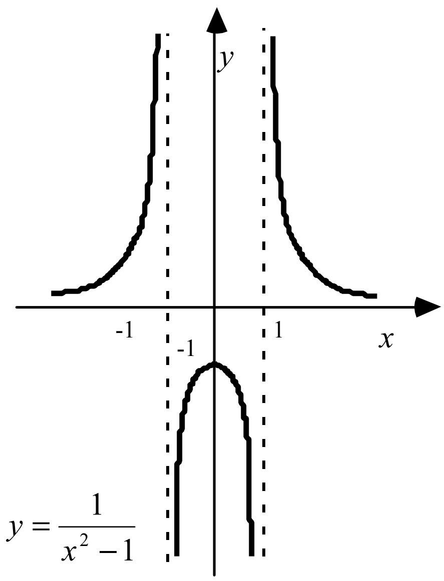
4) **y=–f(x)**. E’ sufficiente ruotare il grafico di *y=f(x)* di 180° attorno all’asse x.
5) **y=|f(x|**. Tenendo conto della definizione di modulo é sufficiente ruotare attorno all’asse x, di 180°, solo quella parte di grafico che “sta sotto” l’asse x stessa.

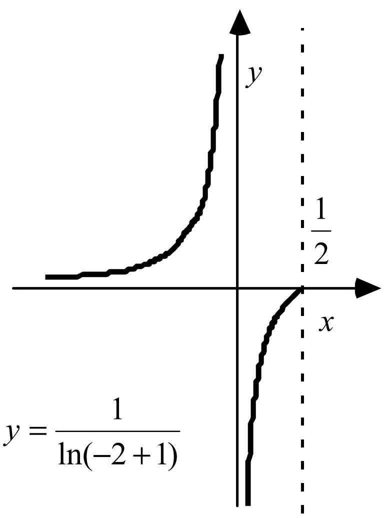




6) **y=$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{f(x)}}$=g(x)** (reciproco). Osserviamo innanzitutto che ove $f(x)\to\infty, \frac{1}{f(x)}\to 0$, mentre ove $f(x)\to 0, \frac{1}{f(x)}\to\infty$ (±∞ a seconda del segno di *f(x)*). Si ha inoltre $g'(x)=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$, da cui si deduce che il segno di g’ è l’opposto di quello di f’, cioè che g cresce ove f decresce e viceversa. Gli esempi che seguono si riferiscono alla funzione $y=\frac{1}{x^2-1}$, ottenuto come reciproco di $y=x^2-1$, e a $y=\frac{1}{\ln(-2x+1)}$, ottenuto come reciproco di una funzione studiata al punto 3.



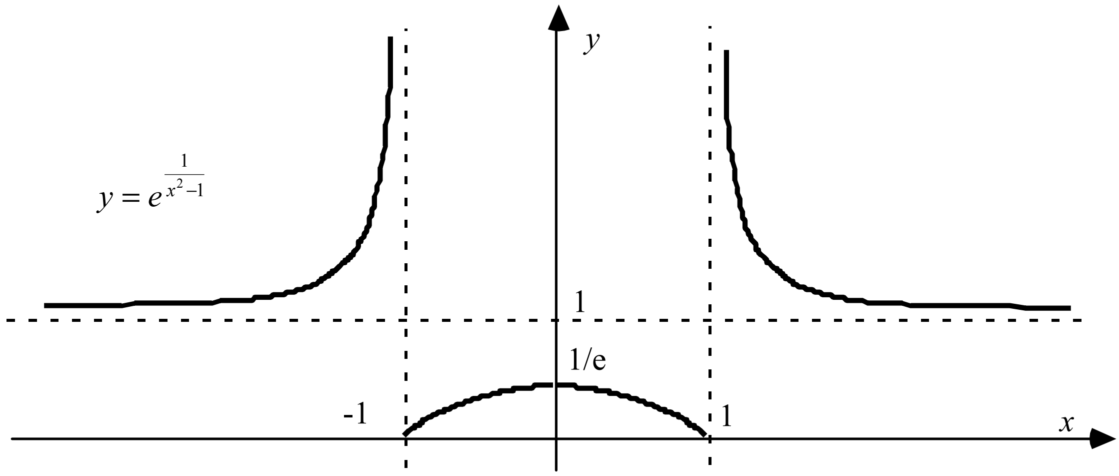




7) **y=lnf(x)=g(x)**. Innanzitutto é definita solo dove *f(x)>0*, inoltre ove $f\to+\infty$, anche $\ln f\to+\infty$, ove $f\to 0^+$, $\ln f\to-\infty$, ove *f=1*, *lnf=0.* Avendosi $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$, ed essendo f>0, f’ e g’ hanno lo stesso segno, cioè g ed f crescono o decrescono contemporaneamente. Con queste

osservazioni é facile ottenere il grafico di *y=ln(-2x+1)*, già considerato nel caso 3, da quello di *y=-2x+1*.

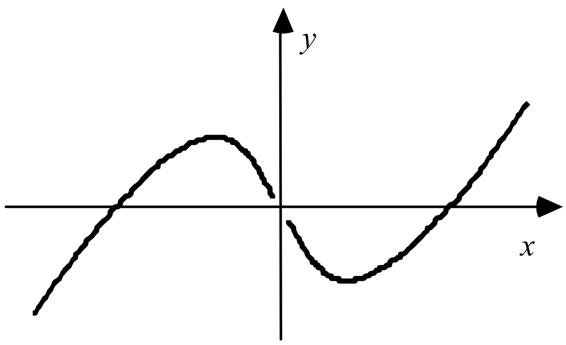
8) $\mathbf{y = e^{f(x)} = g(x)}$. Questa funzione é sempre strettamente positiva. Inoltre ove $f(x) \to +\infty$, $e^{f(x)} \to +\infty$, ove $f(x) \to -\infty$, $e^{f(x)} \to 0$. Avendosi poi $g'(x) = e^{f(x)} f'(x)$, ed essendo $e^{f(x)} > 0$, g' ed f' hanno lo stesso segno, cioè g ed f crescono o decrescono contemporaneamente. Come esempio consideriamo $y = e^{\frac{1}{x^2-1}}$, essendo $y = \frac{1}{x^2-1}$ la funzione già considerata al punto 6.



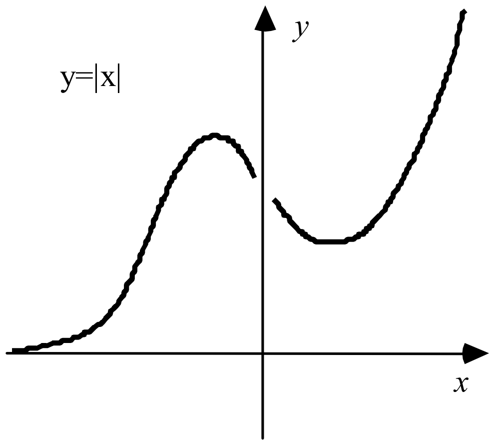
E' chiaro che si possono combinare in vari modi i procedimenti sopra descritti, e anche considerarne altri, come per esempio la somma, il prodotto o il quoziente di due funzioni (anche se non si tratta di casi semplici perché il segno della derivata della somma, prodotto e quoziente non é legato in maniera semplice a quello delle funzioni date). È, in ogni caso, da segnalare il fatto che non é, almeno in generale, elementarmente prevedibile il comportamento della derivata seconda, cioè l'andamento della concavità e convessità.

Riportiamo, per concludere, tre ulteriori esempi.

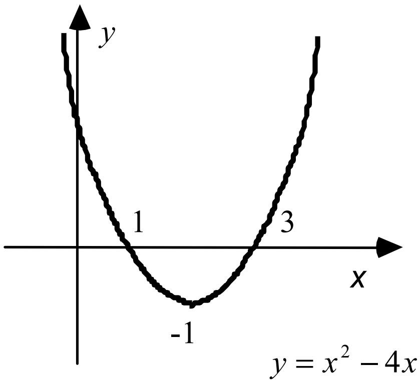
<u>Esempio 1</u>: $y = |x|^x = e^{x \ln|x|}$. Studiamo prima $y = x \ln|x|$, che é una funzione dispari. Questo grafico é stato ottenuto con i soliti metodi, da esso si é poi dedotto quello di $y = |x|^x$.



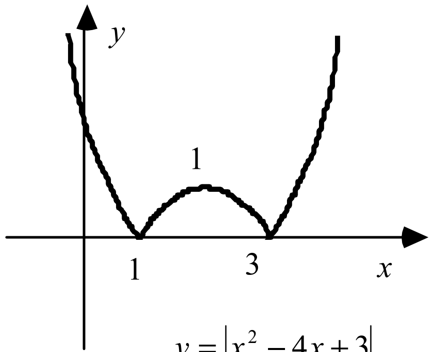
y=xln|x|



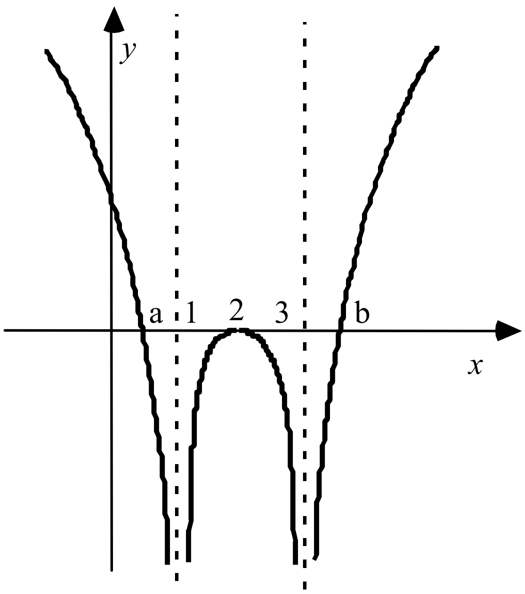
<u>Esempio 2</u>: $y = e^{\frac{1}{\ln\left|x^2-4x+3\right|}}$



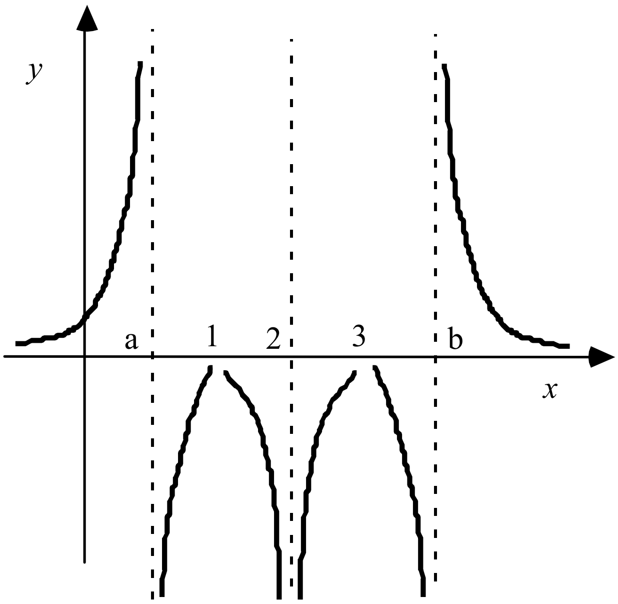
$y = x^2 - 4x + 3$



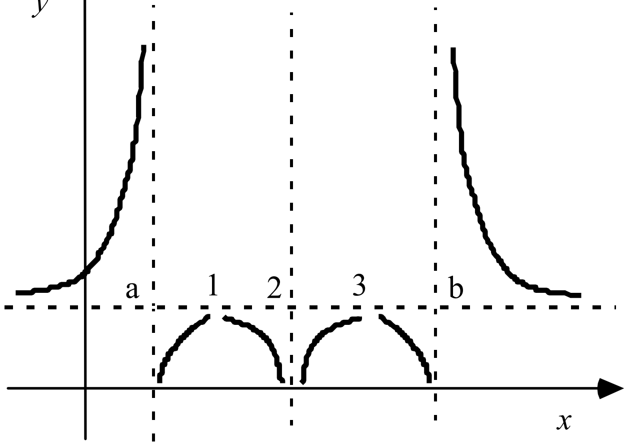
$y = \left|x^2 - 4x + 3\right|$



$y = \ln\left|x^2 - 4x + 3\right|$

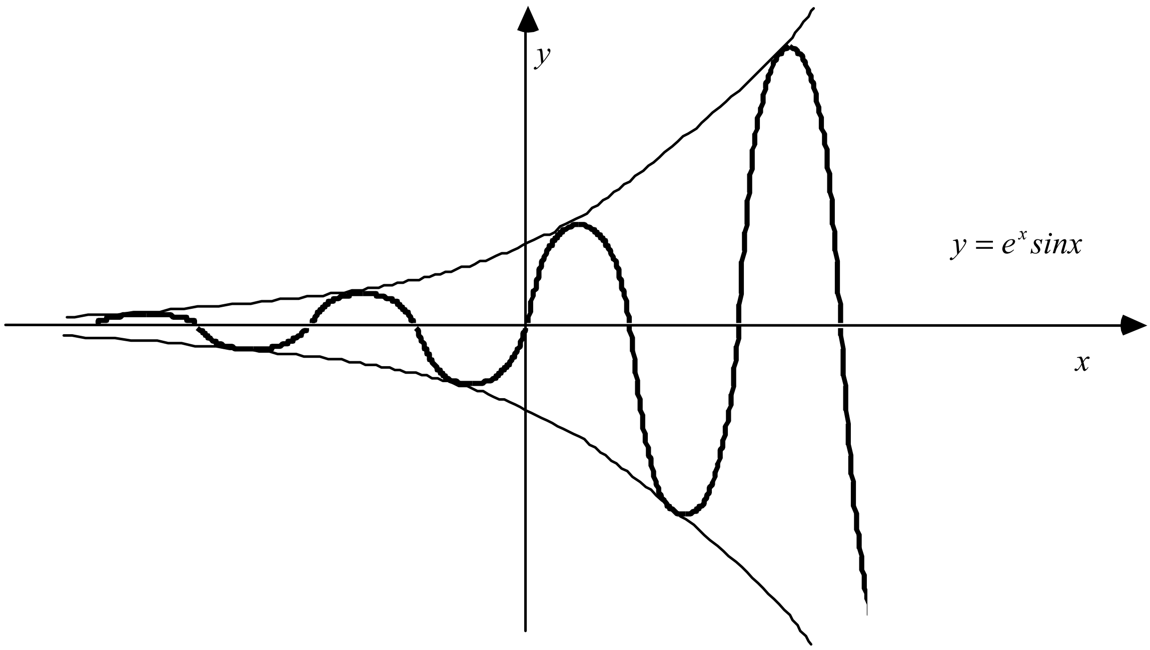


$$y = \frac{1}{\ln\left|x^2 - 4x + 3\right|}$$



$y = e^{\frac{1}{\ln\left|x^2-4x+3\right|}}$

Esempio 3: dai noti grafici di $y = e^x$ e $y = sinx$ ricavare quello di $y = e^x sinx$.



Si osservi, infine, come sia possibile applicare queste tecniche per tracciare anche il grafico di una parabola, senza ricorrere ad alcuna formula. Consideriamo la parabola vista sopra $y = x^2 - 4x + 3$. Si ha (tecnica del completamento del quadrato): $x^2 - 4x + 3 = x^2 - 4x + 4 - 1 = (x-2)^2 - 1$. In base a quanto osservato basterà dunque prendere la parabola $y = x^2$, traslarla a destra di 2 unità e in basso di una unità, per ottenere il grafico già considerato.