UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI UDINE

Corsi di Laurea in Ingegneria

Luciano BATTAIA, Pier Carlo CRAIGHERO

MATEMATICA DI BASE

Testi dei temi d'esame ed esercizi proposti
con soluzione breve

Versione del 16 febbraio 2016

Indice

Premessa

Questa dispensa di Matematica di base è destinata anzitutto a quegli studenti del 1° anno della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Udine, qualunque Corso di laurea essi abbiano prescelto, i quali si trovino a dover colmare un debito formativo nell'area matematica, rivelatosi in occasione del test di valutazione d'entrata al ciclo di formazione universitaria.

Ma essa sarà anche una assai utile palestra per quegli studenti che, pur non avendo dimostrato rilevanti lacune, intendono prepararsi agli impegnativi corsi di Matematica che li attendono, con un robusto ripasso delle nozioni di base.

Chiunque voglia, con pertinenti osservazioni, contribuire al miglioramento di questa dispensa, o segnalare errori, è pregato di mandare una e-mail a batmath@gmail.com.

1 Testi dei temi d'esame con soluzione breve

1.1 Prova scritta del 28/09/01

1. Stabilire, giustificando la risposta, quale delle seguenti relazioni è vera

(a) $\sqrt{7}-\sqrt{5}>\sqrt{5}-\sqrt{3}$, (b) $\sqrt{7}-\sqrt{5}=\sqrt{5}-\sqrt{3}$, (c) $\sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Risposta: (c).

2. Ridurre ai minimi termini le frazioni

$$\text{(a)}\ \frac{2x^2-x-1}{1-4x^2} \qquad \text{(b)}\frac{x^3-7x^2+16x-12}{x^3-6x^2+12x-8}$$

dopo aver calcolato il dominio.

Risposta:

(a) Dominio: $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}$, frazione semplificata: $\dfrac{1-x}{1+2x}$;

(b) dominio: $x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$, frazione semplificata: $\dfrac{x-3}{x-2}$.

3. Si considerino le funzioni

$$f(x)=4-9x^2 \quad \text{e} \quad g(x)=1-3x, \qquad x\in\mathbb{R}.$$

Dopo aver risolto le disequazioni

$$f(x)\geq 0 \quad \text{e} \quad g(x)<0,$$

utilizzare i risultati ottenuti, quando occorrono, per risolvere le seguenti disequazioni

$$\text{(a)}\ \frac{f(x)}{g(x)}\leq 0 \qquad \text{(b)}\ f(x)\cdot g(x)\leq 0 \qquad \text{(c)}\ \begin{cases} f(x)<0 \\ g(x)\geq 0 \end{cases}.$$

Risposta: $f(x)\geq 0 \Leftrightarrow x\in\left[-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right]$; $g(x)<0 \Leftrightarrow x\in\left]\frac{1}{3},+\infty\right[$;

(a) $x\in\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right] \cup \left]\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$;

(b) $x\in\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right] \cup \left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$;

(c) $x\in\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[$.

4. Risolvere le disequazioni

$$\text{(a)} \quad \left|\frac{5}{2+x}\right| \geq 1 \qquad \text{e} \qquad \text{(b)} \quad |1+2x| \leq -x.$$

Risposta: (a) $x \in [-7,-2[\,\cup\,]-2,3]$; (b) $x \in \left[-1,-\frac{1}{3}\right]$.

5. Risolvere

$$\text{l'equazione} \quad \text{(a)}\ \sqrt{2-2x}-3=x \quad \text{e la disequazione} \quad \text{(b)}\ \sqrt{4-9x^2} < 2(1-3x).$$

Risposta: (a) $x=-1$; (b) $x \in \left[-\frac{2}{3},0\right[$.

6. Risolvere

$$\text{l'equazione} \quad \text{(a)}\ \cos x + \sqrt{3}\sin x = 2 \quad \text{e la disequazione} \quad \text{(b)}\ 2\sin 2x + 1 > 0.$$

Risposta: (a) $x \in \left\{\frac{\pi}{3}+2k\pi, \forall\, k \in \mathbb{Z}\right\}$; (b) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{12}+k\pi\,,\ \frac{7}{12}\pi+k\pi\right[$.

7. Trovare l'equazione della retta passante per i punti $O(0,0)$ e $P(3,\sqrt{3})$ e calcolare l'angolo che essa forma con il semiasse positivo delle x. Verificare poi che tale angolo soddisfa l'equazione

$$2\cos^2 x = 5\sin x - 1.$$

Risposta: retta OP: $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$; angolo richiesto: $\frac{\pi}{6}$.

8. Trovare l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A(4,-3)$ e $B(-2,1)$.

Risposta: $y = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$.

9. In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, si consideri il segmento AB di lunghezza 6; il punto A appartiene al semiasse positivo delle y e le coordinate di B sono $(t,0)$ essendo $t \geq 0$. Si scrivano le equazioni parametriche del luogo geometrico $\mathcal{L}$ descritto dal punto medio del segmento AB al variare del parametro t nell'intervallo $[0,6]$. Dedurre, infine, l'equazione cartesiana di tale luogo geometrico, descriverne il tipo e tracciarne il grafico.

Risposta:

$$\begin{cases} x = \dfrac{t}{2} \\ y = \dfrac{\sqrt{36-t^2}}{2} \end{cases} \quad \text{con } t \in [0,6] \quad ; \quad \begin{cases} x^2+y^2=9 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} \quad ;$$

si tratta del quarto di circolo di centro l'origine e raggio 3, contenuto nel primo quadrante, compresi gli estremi.

10. Di un triangolo ABC si sa che $\hat{A} = 80°$, $\hat{B} = 70°$ e $\overline{AB} = 20$. Determinare gli altri elementi del triangolo.

Risposta: $\overline{AC} = 40 \cdot \sin 70° \simeq 37.588$; $\overline{BC} = 40 \cdot \sin 80° \simeq 37.392$.

1.2 Prova scritta del 27/09/02

1. Stabilire l'ordine (<=>) fra i seguenti numeri reali

(a)	$\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3}$	e	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
(b)	$2^{10} + 2^{10}$	e	2^{11}
(c)	$3^{(3^3)}$	e	$(3^3)^3$
(d)	$\log_2 \frac{3}{2}$	e	$\log_2 \frac{1}{4}$
(e)	$\log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} 3$	e	$\log_{\frac{1}{3}} 2$

Risposta:

(a)	$\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{3}}{3}$	$>$	$\sqrt{\frac{2}{3}}$
(b)	$2^{10} + 2^{10}$	$=$	2^{11}
(c)	3^{3^3}	$>$	$(3^3)^3$
(d)	$\log_2 \frac{3}{2}$	$>$	$\log_2 \frac{1}{4}$
(e)	$\log_{\frac{1}{3}} 2 + \log_{\frac{1}{3}} 3$	$<$	$\log_{\frac{1}{3}} 2$

2. Semplificare la frazione algebrica dopo averne trovato il dominio

$$\frac{x^4 - x^2}{2x^3 - 3x^2 - 5x + 6}.$$

Risposta: Dominio : $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}, 1, 2\right\}$; frazione semplificata: $\frac{x^3 + x^2}{(x-2)(2x+3)}$.

3. Risolvere le equazioni
(a) $\sqrt{x^2 - 6x} = -1\,,$
(b) $\sqrt{x+6} = -x\,,$
(c) $\sin 2x - \sin x = 0\,.$

Risposta: (a) Nessuna soluzione; (b) $x = -2$;
(c) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\{k\pi\} \cup \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{3} + 2k\pi\right\}\right)$.

4. Risolvere le disequazioni

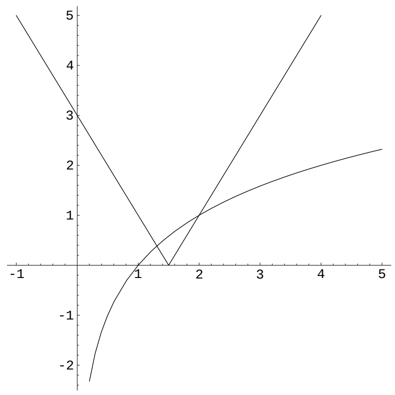
(a) $|x^2 - 3| < 1\,,$

(b) $\sqrt{1-x} + 1 > \dfrac{2x}{\sqrt{1-x}}\,,$

(c) $\dfrac{1 - 2\sin x}{1 - \cos x} > 0\,.$

Risposta: (a) $x \in]-2, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, 2[$; (b) $x \in \left]-\infty, \dfrac{5}{9}\right[$;
(c) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\left]2k\pi,\ \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{5}{6}\pi + 2k\pi\,, 2\pi + 2k\pi\right[\right\}$.

5. Il grafico che segue corrisponde alla risoluzione grafica di una equazione. Scegli l'equazione tra quelle proposte a fianco.



(a) $\log_3 x = |x - 3|\,,$

(b) $\log_2 x = |2x - 3|\,,$

(c) $2^x = |3 - x|\,,$

(d) $\log_2 x = 3 - 2x\,.$

Risposta: $\log_2 x = |2x - 3|$.

6. Dato il triangolo di vertici $A(1, 2)$, $B(6, 9)$ e $C(3, 12)$, trovare il suo baricentro G. Trasformare il triangolo ABC nel triangolo $A'B'C'$ con l'affinità $f\colon (x, y) \to (4x, 5y)$. Trovare infine il baricentro G' del triangolo $A'B'C'$ e verificare che $f(G) = G'$.

Risposta: $G\left(\dfrac{10}{3}, \dfrac{23}{3}\right)$; $A'\,(4, 10)$; $B'\,(24, 45)$; $C'\,(12, 60)$; $G'\left(\dfrac{40}{3}, \dfrac{115}{3}\right)$.

7. Consideriamo un triangolo di lati a, b e c opposti rispettivamente agli angoli α, β e γ. Calcolare a e b sapendo che $c = 1$, $\alpha = 2\beta$ e $\cos\alpha = 2/5$.

Risposta: $a = \dfrac{\sqrt{70}}{9}$, $b = \dfrac{5}{9}$.

8. Trasformare in forma cartesiana la curva $\mathcal{C}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -4t^2 + 12t - 5, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Specificare di che curva si tratta, rappresentarla graficamente e scrivere le equazioni delle rette tangenti ad essa passanti per il punto $(0, 4)$.

Risposta: $y = -x^2 + 4x$; la curva è un parabola con asse parallelo all'asse y, concavità verso il basso, vertice in $V(2, 4)$. Le due rette tangenti sono $y = 4$ e $y = 8x + 4$.

1.3 Prova scritta del 19/09/03

1. Dato un numero reale $a > 1$, mettere in ordine crescente i seguenti numeri:

$$a\sqrt[3]{a},\ a^{2/5},\ a^2\sqrt{a},\ a^{1/3},\ \sqrt{\sqrt{a}},\ \sqrt[3]{a},\ \sqrt{a^5},\ \sqrt[4]{a}$$

Risposta: $\sqrt{\sqrt{a}} = \sqrt[4]{a} < a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a} < a^{\frac{2}{5}} < a\sqrt[3]{a} < a^2\sqrt{a} = \sqrt{a^5}$.

2. Cosa significa che una strada ha una pendenza del 16%? E del 100%?

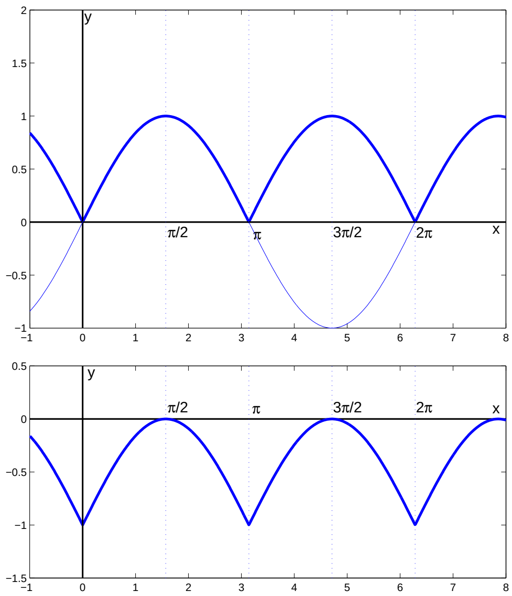
Risposta: Significa che l'angolo della strada con l'orizzontale è, rispettivamente, $\operatorname{arctg}\frac{16}{100} = \operatorname{arctg}\frac{4}{25} \simeq 9°5'25''$, $arctg\frac{100}{100} = 45°$.

3. Se la somma di due numeri è uguale a 1, dimostrare che la loro differenza coincide con la differenza dei loro quadrati.

Risposta: $a + b = 1 \Rightarrow a - b = 1 \cdot (a - b) = (a + b)(a - b) = a^2 - b^2$.

4. Tracciato il grafico della funzione $f(x) = \sin x$, dedurre da esso il grafico della funzione $g(x) = |\sin x| - 1$.

Risposta:



5. Semplificare la frazione algebrica

$$\frac{\dfrac{9y^2}{3y-2x} - 3y}{2x} : \frac{3y}{2x + \dfrac{9y^2}{2x-3y}}$$

Risposta: $-\dfrac{4x^2 - 6xy + 9y^2}{(2x-3y)^2}$.

6. Dopo averne stabilito il dominio, semplificare le frazioni algebriche

(a) $\dfrac{x^2+x}{-2x^2}$

(b) $\dfrac{2x^3+5x^2-33x+20}{(2x-5)(x-1)}$

Risposta: (a) Dominio: $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; frazione semplificata: $\dfrac{x+1}{-2x}$;
(b) dominio: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{1, \dfrac{5}{2}\right\}$; frazione semplificata: $\dfrac{x^2+5x-4}{x-1}$.

7. Risolvere le seguenti equazioni e disequazioni

(a) $\sqrt{x} = \sqrt[6]{x^3+\sqrt{2x-1}}$

(b) $\sin\left(x+\dfrac{2}{3}\pi\right) = \sin 3x$

(c) $\sqrt{|1-x^2|} < x+1$

(d) $\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{(x-2)^2}} > -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(e) $2|\cos x| > \sqrt{3}$

Risposta: (a) $x = \dfrac{1}{2}$;
(b) $x \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left\{\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{3}+k\pi\right\}\right)$;
(c) $x \in]0, +\infty[$;
(d) $x \in [1, 2[\cup]2, +\infty[$.
(e) $x \in \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]-\frac{\pi}{6}+k\pi, \frac{\pi}{6}+k\pi\right[$.

8. Rispetto ad un sistema di riferimento Oxy, determinare l'equazione del luogo $\mathcal{L}$ dei punti $P(x, y)$ la cui distanza dal punto $O(0, 0)$ è doppia della distanza dal punto $A(1, 0)$ e infine rappresentarlo graficamente.

Risposta: $x^2+y^2-\dfrac{8}{3}x+\dfrac{4}{3}=0$; il luogo è il circolo di centro $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ e raggio $\dfrac{2}{3}$.

9. Consideriamo un triangolo di lati a, b e c opposti rispettivamente agli angoli α, β e γ. Calcolare a e b sapendo che $c = 2$, $\alpha+\beta = \pi/3$ e $\sin\alpha = 1/4$.

Risposta: $a = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; $b = \dfrac{3\sqrt{5}-1}{2\sqrt{3}}$.

10. Determinare il valore dei parametri a e b in modo che il polinomio

$$P(x) = x^3+2x^2+ax+b$$

ammetta $x = 1$ come radice doppia e poi scomporlo in fattori.

Risposta: $a = -7$; $b = 4$; $x^3 + 2x^2 - 7x + 4 = (x - 1)^2(x + 4)$.

1.4 Prova scritta del 15/11/04

1. (a) Scomporre in fattori il polinomio $P(a) = -a^2 + 2a - 1$.
(b) Dopo averne stabilito il dominio, semplificare la funzione razionale

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 6}{9 - 6x + x^2}.$$

Risposta: (a) $P(a) = -(a - 1)(a - 1) = -(a - 1)^2$;
(b) Dominio $= \mathbb{R} \setminus \{3\}$; fraz.semplificata: $\dfrac{x^2 + x - 2}{x - 3}$.

2. (a) Sia assegnata l'equazione $x + 3m = 7$. Per quali valori di m la soluzione è $x = \sqrt{2}$?
(b) Risolvere la disequazione $|x^2 - x| - 9 \leq 0$.

Risposta: (a) $m = \dfrac{7 - \sqrt{2}}{3}$;
(b) $x \in \left[\dfrac{1 - \sqrt{37}}{2}, \dfrac{1 + \sqrt{37}}{2}\right]$

3. Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} > 2.$$

Risposta: $x \in]1, 4[$.

4. (a) Semplificare la rappresentazione del numero

$$c = \left(\sqrt{19} - \sqrt{51}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[5]{19^{\frac{1}{2}} + \sqrt{51}}.$$

(b) Dimostrare che $\sqrt[3]{2}$ è irrazionale.

Risposta: (a) $c = -2$.
(b) È noto che vale

$$(*) \quad p,\, q \in \mathbb{N} \wedge p,\, q \textit{ primi fra loro } \wedge q > 1 \Rightarrow \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}\,.$$

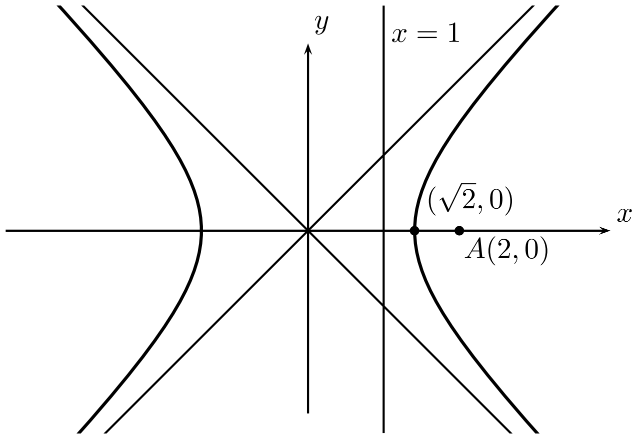
Tenendo conto di questo la $\sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q}$ si prova per assurdo. Infatti $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}$, primi fra loro : $\dfrac{p}{q} = \sqrt[3]{2} \Rightarrow \dfrac{p^3}{q^3} = 2 \in \mathbb{N}$: assurdo, perchè $p^3, q^3 \in \mathbb{N} \wedge p^3, q^3$ sono primi fra loro (come p e q) $\wedge q^3 > 1$ (poiché $2 = p^3$ è impossibile) sicché $\dfrac{p^3}{q^3} = 2 \in \mathbb{N}$ contraddice la $(*)$.

5. Determinare i numeri reali a e b in modo che il polinomio $P(x) = x^4 + ax^2 + bx + 2$ sia divisibile per il polinomio $Q(x) = x^2 + x + 1$.

Risposta: $a = 2$, $b = 1$.

6. Nel piano cartesiano Oxy siano dati la retta r di equazione $x = 1$ ed il punto $A(2, 0)$. Si determini l'equazione del luogo geometrico $\mathcal{L}$ dei punti P del piano per cui $\overline{PA} = \sqrt{2} \cdot \overline{PH}$ essendo $\overline{PH}$ la distanza tra il punto P e la retta r. Rappresentare graficamente il luogo ottenuto.

Risposta: L'equazione del luogo $\mathcal{L}$ é: $x^2 - y^2 = 2$. $\mathcal{L}$ è l'iperbole equilatera in figura



7. Nel piano cartesiano Oxy trovare l'equazione della parabola con asse parallelo all'asse y passante per i punti $A(-1, -1)$, $B(-3, 1)$ e $C(-2, 3)$. Tracciarne il grafico.

Risposta: Detta $\mathcal{P}$ la parabola richiesta, la sua equazione è: $y = -3x^2 - 13x - 11$. $\mathcal{P}$ è la parabola con asse verticale, vertice in $V(-13/6,\ 37/12)$ e concavità verso il basso.

8. Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$ trovare le equazioni delle sue rette tangenti passanti per il punto $A(0, 2)$.

Risposta: $x = 0$ e $y = -\dfrac{3}{4}x + 2$.

9. In un triangolo ABC si ha $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = 2a$ e $A\hat{C}B = \frac{2}{3}\pi$. Calcolare $\overline{AB}$ e trovare il raggio r della circonferenza circoscritta.

Risposta: Usando *Carnot* si trova $\overline{AB} = \sqrt{7}a$. Usando il *teorema dei seni di Eulero*, ove r è il raggio richiesto, si trova

$$2r = \frac{\overline{AB}}{\sin A\hat{C}B} = \frac{\sqrt{7}a}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}} = 2\sqrt{\frac{7}{3}}a\,,$$

donde $r = \sqrt{\frac{7}{3}}a\,.$

10. (a) Risolvere la disequazione $\sqrt{3}\sin x - 1 - \cos x > 0$.

(b) Per quali valori di x la funzione $f(x) = \pi \sin \frac{x}{2}$ assume valore minimo?

Risposta: (a) $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi\right[$.

(b) Per ogni $x \in \{3\pi + 4k\pi,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}\}$.

1.5 Prova scritta del 14/03/05

1. Scomporre in fattori il polinomio $P(x) = -x^3 + x^2 + 5x - 5$ e usare la scomposizione ottenuta per semplificare la funzione razionale

$$f(x) = \frac{P(x)}{x^2 + x - 2}$$

dopo averne stabilito il dominio.

Risposta: $P(x) = -(x-1)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$.

Dominio di $f(x)$: $\mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$; $f(x) = \dfrac{5 - x^2}{x+2}$.

2. Risolvere l'equazione

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\operatorname{ctg} x.$$

Risposta: $x \in \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \forall\, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\pi, \forall\, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

3. Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{x+3} - 2|x|}{|x| - 1} > -2.$$

Risposta: $x \in]-1, 1[\cup]1, +\infty[$.

4. Semplificare la rappresentazione del numero

$$c = \left(6^{\frac{1}{3}} - \sqrt[3]{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\sqrt[3]{36} + \sqrt[3]{12} + 4^{\frac{1}{3}}}.$$

Risposta: $c = 2$.

5. Determinare i numeri reali a e b in modo che il polinomio $P(x) = x^4 + ax^2 - x + 1$ sia divisibile per il polinomio $Q(x) = x^2 + bx + 2$.

Risposta: $a = \dfrac{37}{18}$, $b = \dfrac{2}{3}$.

6. Siano r e s due rette tra loro ortogonali. Un segmento AB di lunghezza l ha l'estremo A che scorre su r e B su s. Rispetto ad un conveniente sistema di riferimento Oxy, si determini l'equazione della curva tracciata dal punto medio P di AB.

Risposta: Detta $\mathcal{C}$ la curva in questione, la sua equazione è $x^2 + y^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2$; dunque $\mathcal{C}$ è il circolo di centro $O(0,0)$ e raggio $\frac{l}{2}$.

7. Rispetto ad un sistema di riferimento Oxy cartesiano ortogonale, scrivere l'equazione della circonferenza passante per $A(1,4)$ e $B(-2,1)$ e avente il centro sulla retta di equazione $3x - y + 4 = 0$.

Risposta: Detta $\mathcal{C}$ la circonferenza in oggetto, l'equazione è: $x^2 + y^2 + x - 5y + 2 = 0$. $\mathcal{C}$ è il circolo di centro $M(-1/2, 5/2)$ e raggio $r = 3/\sqrt{2} = (1/2)\overline{AB}$ (N.B. la retta $3x - y + 4 = 0$ passa per $M(-1/2, 5/2)$, dunque ...).

8. Per quale valore di $b \in \mathbb{R}$ il punto $A(-1, b)$ (in un sistema di riferimento Oxy cartesiano ortogonale) determina con l'origine O una retta parallela alla retta di equazione $2x - y + \sqrt{3} = 0$? Calcolare poi la distanza tra le due rette.

Risposta: Per $b = -2$; distanza delle due rette (parallele)$=\sqrt{3/5}$.

9. In un triangolo ABC la mediana AM relativa al lato BC ha lunghezza 1, $\alpha = M\hat{A}C = \pi/12$ $\left(\sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)$ e $\beta = A\hat{M}B = \pi/3$. Calcolare la lunghezza di AB.

Risposta: Risulta $B\hat{C}A = \frac{\pi}{4}$, donde (*teorema dei seni* per MCA)

$$\frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\overline{AC}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\overline{MC}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{\frac{3}{2}} \text{ e } \overline{MC}\ (= \overline{MB}) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Applicando *Carnot* ad AMB si trova poi

$$\overline{AB} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)^2 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{10 - 4\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{10 - 4\sqrt{3}}}{2}.$$

10. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{3}\cos x + \sin x < 2.$$

Risposta: $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(N.B. per $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ risulta $\sqrt{3}\cos x + \sin x = 2$).

1.6 Prova scritta del 20/06/05

1. Dopo averne stabilito il dominio, semplificare la funzione razionale

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x + 3}{x^3 - 1}.$$

Risposta: Dominio di $f(x) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$; $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 3}{x^2 + x - 1}$.

2. Risolvere l'equazione

$$2 \sin^2 x = \operatorname{tg} x.$$

Risposta: $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\{k\pi, \ \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}$.

3. Risolvere l'equazione

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+1} = \sqrt{6-x}.$$

Risposta: L'equazione ha per sua sola soluzione il numero

$$\frac{18 - 2\sqrt{31}}{5}.$$

4. Stabilire, giustificando la risposta, se la seguente affermazione è vera o falsa

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \frac{x-1}{x-6} \leq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} x - 1 \leq x - 6 \\ x - 6 \neq 0 \end{cases}.$$

Risposta: L'implicazione doppia proposta *è falsa*, poiché la disequazione a primo membro ha per insieme delle soluzioni la semiretta $]-\infty, -6[$, mentre il sistema a secondo membro non ha ovviamente alcuna soluzione.

5. Dimostrare che se $1 \leq x \leq 2$ allora l'espressione $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$ è identicamente uguale a 2.

Risposta: Per $x \geq 1$ si ha che

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = \\
&\qquad = \sqrt{x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{x - 1 - 2\sqrt{x-1} + 1} = \\
&\qquad = \sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2 + 2\sqrt{x-1} + 1} + \sqrt{\left(\sqrt{x-1}\right)^2 - 2\sqrt{x-1} + 1} = \\
&\qquad = \sqrt{\left[\sqrt{x-1} + 1\right]^2} + \sqrt{\left[\sqrt{x-1} - 1\right]^2} = \\
&\qquad = \left|\sqrt{x-1} + 1\right| + \left|\sqrt{x-1} - 1\right| = \\
&\qquad = \sqrt{x-1} + 1 + \left|\sqrt{x-1} - 1\right| ;
\end{aligned}$$

se, inoltre, è anche $x \leq 2$, allora $\sqrt{x-1} - 1 \leq 0$, per cui

$$\left|\sqrt{x-1} - 1\right| = -(\sqrt{x-1} - 1) = -\sqrt{x-1} + 1\,,$$

donde la facile conclusione.

6. Scrivere le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 + 2x - 8y + 1 = 0$$

e passanti per l'origine. Calcolare inoltre l'area del parallelogramma con i lati tangenti alla circonferenza e paralleli alle due rette.

Risposta: $y = 0$, $y = \dfrac{8}{15}\,x$; area del parallelogramma: 136.

7. Un quadrato ed un esagono regolare hanno la stessa area. Quale dei due poligoni ha il maggior perimetro? Giustificare la risposta.

Risposta: Se il lato, il perimetro e la'area rispettivi del quadrato e dell'esagono sono

$$l_1,\, 2p_1,\, a_1 \quad \text{e} \quad l_2, 2p_2, a_2\,,$$

si ha

$$2p_1 = 4l_1,\, 2p_2 = 6l_2,\, a_1 = l_1^2,\, a_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2}\, l_2^2\,;$$

$a_1 = a_2 \Rightarrow l_1^2 = \dfrac{3\sqrt{3}}{2}\, l_2^2 \Rightarrow l_1 = \sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}\, l_2 \Rightarrow 2p_1 = 4l_1 = 4\sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}\, l_2 = \sqrt{24\sqrt{3}}\, l_2 > 6l_2 = 2p_2$

8. Scrivere l'equazione della retta passante per il punto $A(0,3)$ e formante un angolo di $2\pi/3$ con il semiasse positivo delle x.

Risposta: $y = -\sqrt{3}x + 3$.

9. In un parallelepipedo rettangolo a base quadrata lo spigolo di base e l'altezza misurano 12 e 20. Trovare la tangente dell'angolo α che una diagonale del parallelepipedo forma con il piano della base. Calcolare anche $\sin 2\alpha$.

Risposta: $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{5}{3\sqrt{2}}$; $\sin 2\alpha = \dfrac{60}{43\sqrt{2}}$.

10. Risolvere la disequazione

$$3 \sin x + \sqrt{3} \cos x + 4 \leq 4(\sin^2 2x + \cos^2 2x).$$

Risposta: $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ \dfrac{11\pi}{6} + 2k\pi\right]$.

1.7 Prova scritta del 01/09/05

1. Dopo averne stabilito il dominio, semplificare la funzione razionale

$$f(x) = \frac{2x^4 + 3x^3 + 3x - 2}{x^3 + 2x^2 + x + 2}.$$

Risposta: Dominio di $f(x)$: $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$; $f(x) = 2x - 1$.

2. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$

$$\cos^2 x - \sin^2 2x > 0.$$

Risposta: Posto, per ogni $k \in \mathbb{Z}$,

$$E_k = \left[2k\pi,\, \frac{\pi}{6} + 2k\pi\right[\,\cup\, \left]\frac{5}{6}\pi + 2k\pi,\, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi\right[\,\cup\, \left]\frac{11}{6}\pi + 2k\pi,\, 2\pi + 2k\pi\right],$$

l'insieme delle soluzioni della disequazione è

$$\mathbf{E} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} E_k\,.$$

3. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2\cos x \cos y = 1 \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2 \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Risposta: Le coppie soluzioni sono del tipo

$$\left(\frac{\pi}{4} + h\pi,\, \frac{\pi}{4} + (2k - h)\pi\right),\ \forall\, h,\, k \in \mathbb{Z}\,.$$

4. Risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x - 1} = \sqrt[3]{x - 3}.$$

Risposta: L'equazione non ha alcuna soluzione reale.

5. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$

$$|x - 2| - 2|x + 1| < 1.$$

Risposta: $x \in]-\infty,\, -3[\,\cup\, \left]-\frac{1}{3},\, +\infty\right[$.

(Suggerimento: realizza un grafico accurato delle due funzioni $|x - 2|$ e $1 + 2|x + 1| = 1 + |2x + 2|$, con opportuna unità di misura. . .).

6. Trovare due numeri reali x_1 e x_2 tali che la loro somma è pari al loro prodotto moltiplicato per $2\sqrt{2}$ e la somma dei lori quadrati vale 10.

Risposta: $\left\{x_1 = -\sqrt{2}+\sqrt{3},\, x_2 = -\sqrt{2}-\sqrt{3}\right\}$, oppure $\left\{x_1 = \dfrac{5\sqrt{2}+\sqrt{30}}{4},\, x_2 = \dfrac{5\sqrt{2}-\sqrt{30}}{4}\right\}$.

7. Determinare il raggio di base x e l'altezza y di un cono la cui superficie totale è uguale a quella di una sfera di raggio R e il cui volume è uguale a quello di un'altra sfera di raggio $r = 1$. Discutere rispetto a R l'esistenza di soluzioni e trovarle.

Risposta: per $R = \sqrt[6]{2}$ si ha una sola soluzione

$$x = \sqrt[6]{2}\,, \quad y = 2\sqrt[3]{4}\,;$$

per $R > \sqrt[6]{2}$ si hanno le due soluzioni

$$x_1 = \sqrt{\frac{R^3+\sqrt{R^6-2}}{R}}\,, \quad y_1 = \frac{4R}{R^3+\sqrt{R^6-2}} = 2R\left(R^3-\sqrt{R^6-2}\right)\,,$$

e

$$x_2 = \sqrt{\frac{R^3-\sqrt{R^6-2}}{R}}\,, \quad y_2 = \frac{4R}{R^3-\sqrt{R^6-2}} = 2R\left(R^3+\sqrt{R^6-2}\right)\,.$$

8. Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, si consideri la circonferenza γ di equazione $x^2+y^2 = r^2$. Trovare il luogo geometrico $\mathcal{L}$ dei punti P del piano tali che

$$3\overline{PT}^2 = \overline{PS}^2,$$

dove T è il punto di contatto con γ della retta tangente passante per P e S è l'intersezione con l'asse x della retta per P parallela all'asse y.

Risposta: $\mathcal{L}\colon \dfrac{x^2}{(R)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}R\right)^2} = 1\,;$ $\mathcal{L}$ è l'ellisse con asse maggiore parallelo all'asse Oy, di lunghezza $\sqrt{3/2}\,R$, e asse minore parallelo all'asse Ox, di lunghezza R.

9. Dato un triangolo rettangolo di cateti a e b e ipotenusa c, dimostrare che

$$a = (b+c)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},$$

dove α è l'angolo opposto al cateto a.

Risposta: Se ABC è rettangolo in C, come nella figura seguente, la retta per A e H è la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, e K è la proiezione ortogonale di B su tale bisettrice, si hanno i seguenti fatti:

a) $\overline{CH} = b\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\,;$

b) $K\hat{B}H = C\hat{A}H = \dfrac{\alpha}{2}\,;$

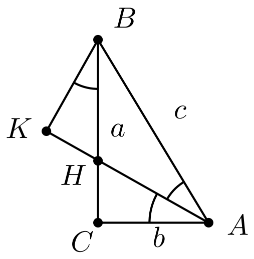
c) $A\hat{B}K = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}$;

d) $\overline{BK} = c\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\alpha}{2}\right) = c\sin\dfrac{\alpha}{2}$;

e) $\overline{BH} = \dfrac{\overline{BK}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = c\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$;

f) $a = \overline{CB} = \overline{CH} + \overline{HB} = b\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} + c\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = (b+c)\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2}$,

C.V.D.



10. Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy, scrivere l'equazione della circonferenza γ di raggio 1, tangente agli assi e contenuta nel primo quadrante. Scrivere l'equazione della retta passante per P e Q, con $P, Q \in \gamma$, tale che la corda PQ ammette il punto $A\left(\frac{3}{2}, \frac{4}{3}\right)$ come punto medio. Detta B l'intersezione tra la secante PQ e l'asse x, costruire un quadrato equivalente al rettangolo $BP \times BQ$.

Risposta: $r\colon y = -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{43}{12}$; $B\left(\dfrac{43}{18}, 0\right)$; il lato del quadrato richiesto è $l = \dfrac{25}{18}$.

(Suggerimento: poiché $T(1,0)$ è il punto di tangenza di γ con Ox, è noto che $\overline{BT}^2 = \overline{BP}\cdot\overline{BQ}$, dunque...).

Nota: $\overline{BT}^2 = \overline{BP}\cdot\overline{BQ}$ si chiama *potenza* del punto B rispetto al circolo γ.

1.8 Prova scritta del 14/10/05

1. Sia a un numero reale maggiore di 1. Ordinare in modo crescente i seguenti numeri

$$\left(\sqrt{\sqrt[15]{a}}\right)^{23} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \quad ; \quad \frac{\sqrt[8]{a^7}\cdot\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a^3}} \quad ; \quad \frac{a\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a^{5/4}}}.$$

Risposta:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = a^{-2/3} < \left(\sqrt{\sqrt[15]{a}}\right)^{23} = a^{23/30} < \frac{a\sqrt{a\sqrt{a}}}{\sqrt{a^{5/4}}} = a^{9/8} < \frac{\sqrt[8]{a^7}\cdot\sqrt[4]{a^5}}{\sqrt{a^3}} = a^{43/24}.$$

2. Risolvere la seguente disequazione in $\mathbb{R}$

$$4|x^2 - x| \geq 1.$$

Risposta: $x \in \left]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left\{\dfrac{1}{2}\right\} \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}, \infty\right[$.

3. Semplificare la seguente espressione dove $a \neq b$ e $\alpha \neq k\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$

$$\frac{\dfrac{(a^2+b^2)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)} - \dfrac{2ab\sin(2\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}}{a\cos(8\pi)+b\sin\left(\dfrac{7}{2}\pi\right)}.$$

Risposta: $a-b$.

4. Stabilire per quali valori dei coefficienti $a, b \in \mathbb{R}$ il seguente polinomio

$$P(x) = x^3 + x^2 + ax + b$$

ammette $x = -1$ come radice doppia.

Risposta: Per $a = b = -1$.

5. Razionalizzare il denominatore della frazione

$$\frac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}}$$

e trovare le soluzioni $x \in [0, 2\pi]$ dell'equazione

$$(1+\cos x)^2 = (7+4\sqrt{3})\sin^2 x.$$

Risposta: $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{4+2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $x \in \left\{\dfrac{\pi}{6},\ \pi,\ \dfrac{11}{6}\pi\right\}$.

6. Risolvere la seguente disequazione nell'intervallo $[0, 2\pi]$

$$\cos x + \sqrt{3}\sin x \leq \sqrt{3}.$$

Risposta: $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{6}\right] \cup \left[\dfrac{\pi}{2}, 2\pi\right]$.

7. Del quadrilatero $ABCD$ si sa che

(a) $\overline{AB} = 2\overline{BC} = 4\overline{CD} = 4l$,

(b) $A\hat{B}C = 2\pi/3$ e $B\hat{C}D = \pi/2$.

Calcolare, in funzione di l, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, il coseno di $D\hat{B}A$ e quindi $\overline{DA}$.

Risposta: $\overline{AC} = \sqrt{28}l$, $\overline{BD} = \sqrt{5}l$, $\cos(D\hat{B}A) = -\dfrac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{5}}$ (< 0), $\overline{AD} = \sqrt{29-4\sqrt{3}}l$.

8. Nel piano cartesiano Oxy un triangolo ABC, isoscele sulla base BC, circoscritto alla circonferenza γ di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0,$$

ha l'angolo $B\hat{A}C$ di $\pi/4$ e i vertici A e B sulla retta r di equazione $x = -1$, con A nel semipiano $y < 0$. Trovare le coordinate di A e la misura dell'altezza h relativa alla base BC.

Risposta: $A(-1, -2\sqrt{2})$; $h = 2 + 2\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$.

9. Disegnare nel piano cartesiano Oxy le due rette parallele

$$r\colon 4x + 3y - 1 = 0 \quad \text{e} \quad s\colon y = -\frac{4}{3}x + \frac{11}{3}.$$

Dato il punto $P_0(2, 1) \in s$, determinare le coordinate dei vertici dei quadrati che hanno un vertice in P_0 e due lati sulle rette r e s.

Risposta: Si trovano i 2 quadrati di vertici rispettivi

$$P_0(2,1) \in s, \quad S_1\left(\frac{16}{5}, -\frac{3}{5}\right) \in s, \quad R_1\left(\frac{8}{5}, -\frac{9}{5}\right) \in r, \quad Q_0\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{15}\right) \in r\,;$$
$$P_0(2,1) \in s, \quad S_2\left(\frac{4}{5}, \frac{13}{5}\right) \in s, \quad R_2\left(-\frac{4}{5}, \frac{7}{5}\right) \in r, \quad Q_0\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{15}\right) \in r\,.$$

N.B. Il circolo di centro $P_0(2, 1)$ e raggio 2 interseca S_1 ed S_2 su s, e Q_0 su r; il circolo di centro $P_0(2, 1)$ e raggio $2\sqrt{2}$ interseca R_1 ed R_2 su r.

10. Nel piano cartesiano Oxy sono dati i punti $A(0, 1)$ e $B(2, 1)$. Al variare del punto P sulla retta $r\colon y = -1$, l'ortocentro (il punto di incontro delle altezze) del triangolo ABP descrive una curva $\mathcal{C}$. Trovarne l'equazione e disegnarla.

Risposta: $\mathcal{C}$ ha equazione $y = \dfrac{1}{2}x^2 + 1$; $\mathcal{C}$ è la parabola con l'asse verticale, il vertice nel punto $V\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{8}\right)$ e la concavità verso l'alto. La parabola passa per A e B.

1.9 Prova scritta del 13/03/06

1. Siano a e b due numeri reali distinti non entrambi nulli e $\alpha \neq k\pi/2$ per ogni k intero: semplificare la seguente espressione

$$\frac{\dfrac{(a^3 - b^3)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)}{\operatorname{tg}(\pi + \alpha)} + \dfrac{3ab(a - b)\cos(\pi + \alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)}}{a^2 + b^2\cos(6\pi) + 2ab\sin\left(\dfrac{11}{2}\pi\right)}.$$

Risposta: $a - b$ (si tenga conto delle identità relative agli "angoli associati").

2. Risolvere la seguente equazione trigonometrica

$$\sin 3x - \sin x - (2\cos^2 x - 1) = 0.$$

Risposta: (Suggerimento: usando la prostaferesi della differenza di seni ...).

$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi,\ \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \right\}.$$

3. Dato il polinomio

$$P(x) = x^2 + (2\lambda - 1)x + 3 - 5\lambda,$$

per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la somma delle radici è uguale al loro prodotto?

Risposta: $\lambda = \dfrac{2}{3}$.

4. Dati i polinomi

$$f(x) = 9 - 4x^2 \quad \text{e} \quad g(x) = 2x - 1,$$

risolvere le disequazioni

$$(a)\ \frac{f(x)}{g(x)} \le 0 \quad , \quad (b)\ f(x)g(x) \ge 0 \quad , \quad (c)\ \begin{cases} f(x) < 0 \\ g(x) \ge 0 \end{cases}.$$

Risposta: (a) $x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right[\ \cup\ \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$;

(b) $x \in \left]-\infty, -\frac{3}{2}\right] \ \cup\ \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$;

(c) $x \in \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$.

5. Semplificare l'espressione

$$f(x) = \left(\frac{\dfrac{2x}{x^3-3} + 1}{\dfrac{x^3-3}{2x} + 1} + 1 \right) : (x^2 + x + 3)$$

fino a ridurla ad una frazione razionale ridotta ai minimi termini.

Risposta: $f(x) = \dfrac{x-1}{x^3-3}$, $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \left\{0,\ 1,\ \sqrt[3]{3}\right\}$.

6. Risolvere la seguente disequazione in $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x^2 - 1} > x + 2.$$

Risposta: $x \in \left]-\infty, -\frac{5}{4}\right[$.

7. Le misure $a = \overline{BC}$ e $b = \overline{AC}$ di due lati di un triangolo ABC soddisfano le due relazioni

$$a + b = 7 \quad \text{e} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{7}{12} \quad \text{e} \quad b > a,$$

inoltre $\sin\alpha = 3/5$ essendo $\alpha = B\hat{A}C$, e AC è il lato maggiore di ABC. Calcolare le misure a, b e $c = \overline{AB}$ di tutti i lati del triangolo e dire di che tipo di triangolo si tratta.

Risposta: $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$; ABC è rettangolo in A.

8. Nel piano cartesiano Oxy trovare le rette tangenti comuni alle circonferenze di equazioni

$$x^2 + y^2 + 4x = 0 \quad \text{e} \quad x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Risposta: Si trovano le tre rette di equazioni $x = 0$, $y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x - \sqrt{2}$, $y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$.

9. Dati la retta r di equazione $2x + y - 1 = 0$ e il punto $P(2, 3)$, trovare il punto P' simmetrico di P rispetto ad r.

Risposta: $P'\left(-\frac{14}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

10. Dati il punto $P(1, 2)$ e la parabola di equazione $y = x^2$, determinare

(a) l'equazione del fascio di rette di centro P,

(b) il luogo geometrico $\mathcal{L}$ dei punti medi delle corde determinate dall'intersezione della parabola con le rette del fascio.

Risposta: (a) $y = mx - m + 2$;

(b) il luogo $\mathcal{L}$ ha equazione $y = 2x^2 - 2x + 2$; si tratta della parabola con asse verticale, vertice in $V\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)$, e passante per $P(1, 2)$.

1.10 Prova scritta del 21/04/06

1. Mettere in ordine crescente i seguenti numeri:

$$\sqrt[3]{\sqrt[8]{2^{20}(2^3)^7}}, \quad 2\sqrt{2\sqrt{2}}, \quad \frac{4\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}.$$

Risposta: $\frac{4\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}} < \sqrt[3]{\sqrt[8]{2^{20}(2^3)^7}} < 2\sqrt{2\sqrt{2}}$.

2. Trovare le soluzioni, nell'intervallo $[-\pi, 2\pi]$, della seguente equazione trigonometrica

$$\sin 4x + \sin 2x - \sin(\pi + 3x) = 0.$$

Risposta: Applicando la prostaferesi della somma di due seni l'equazione si riduce subito all'equazione equivalente
$$\sin(3x)[2\cos x + 1] = 0$$
che ha soluzioni, nell'intervallo $[-\pi, 2\pi]$,
$$-\pi,\ -\frac{2}{3}\pi,\ -\frac{1}{3}\pi,\ 0,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ 2\pi\,.$$

3. Determinare i valori di a e b tali che il polinomio
$$P(x) = x^4 + bx^3 + (a+b)x^2 + 5x - b$$
sia divisibile per $x^2 + x + 3$.

Risposta: $a = 1$, $b = 3$.

4. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$
$$\sqrt{3x^2 - 8x + 9} + 2x > 3.$$

Risposta: $x \in]0, +\infty[$.

5. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema non ammette soluzioni?
$$\begin{cases} \sqrt{3x^2 - 8x + 9} + 2x > 3 \\ x^2 - 2kx + k^2 - 1 \le 0 \end{cases}.$$

Risposta: Tenendo conto del risultato dell'esercizio precedente, si trova che il sistema non ha alcuna soluzione se e solo se $k \in]-\infty, -1]$.

6. Risolvere la seguente equazione in $\mathbb{R}$.
$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x}}} = \frac{x^3}{2x^2 - x - 1}.$$

Risposta: $x \in \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right\}$ (suggerimento: si fattorizzi il polinomio $2x^2 - x - 1$ ...).

7. Risolvere la seguente disequazione trigonometrica
$$\frac{2\sin x - 1}{\sqrt{2} - 1 - 2\sqrt{2}\sin^2\frac{x}{2}} > 0.$$

Risposta: $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left]\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{\pi}{4} + 2k\pi\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right[.$

8. Nel quadrilatero $ABCD$ gli angoli $\hat{B}$, $\hat{C}$, $\hat{D}$ misurano rispettivamente $\pi/3$, $\pi/2$ e $7\pi/12$; inoltre i lati BC e CD misurano entrambi $l\sqrt{2}$. Determinare le misure delle diagonali e il perimetro $2p$ del quadrilatero.

Risposta: $\overline{AB} = (3\sqrt{2} - \sqrt{6})l$; $\overline{AD} = (4 - 2\sqrt{3})l$; $\overline{BD} = 2l$; $\overline{AC} = \sqrt{20 - 10\sqrt{3}}l$; $2p = 4 + 5\sqrt{2} - 2\sqrt{3} - \sqrt{6}$.

9. Dati i punti $A(1, 2)$ e $B(7, 5)$, determinare le coordinate dei punti P e Q che dividono il segmento AB in tre parti uguali.

Risposta: $P(3, 3)$, $Q(5, 4)$.

10. Sono dati punti $A(-2, -1)$, $B(-5/2, 25/4)$ e la parabola di equazione $y = x^2$. Trovare i punti P della parabola tali che il triangolo ABP sia rettangolo in P.

Risposta: (Suggerimento: il punto $B(-5/2, 25/4)$ appartiene alla parabola ...). Si trovano i due punti $P_1(1, 1)$, $P_2(1/2, 1/4)$. Si consiglia un accurato grafico.

1.11 Prova scritta del 19/06/06

1. Semplificare la rappresentazione del seguente numero

$$n = \sqrt[12]{\sqrt[3]{5} - 1} \cdot \left(5^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{5} + 1\right)^{\frac{1}{12}} : \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}+1} + 1}.$$

Risposta: $n = 1$.

2. Trovare le soluzioni, nell'intervallo $[-2\pi, \pi/2]$, della seguente equazione trigonometrica

$$\sin(\pi + x) + 2\sin x \cos x = 2\cos^2 x - \cos x.$$

Risposta: $x \in \left\{-\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{3}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right\}$.

3. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il seguente sistema ammette soluzioni?

$$\begin{cases} (x+1)^2(x^2 - 6x + 9) \le 0 \\ kx^2 - 2\sqrt{k}x + 1 \le 0 \end{cases}.$$

Risposta: $k = \frac{1}{9}$.

4. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il polinomio $p(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 2k - 1$ ha una radice doppia? Per ogni valore trovato scomporre il polinomio in fattori.

Risposta: Per $k = \frac{1}{2}$, $p(x) = x(x-2)^2$; per $k = -\frac{5}{54}$, $p(x) = \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 \left(x - \frac{8}{3}\right)$.

5. Risolvere la seguente disequazione:

$$||x-1|-2| \leq 2x+3.$$

Risposta: $x \in \left[-\frac{4}{3},\, +\infty\right[$.

6. Risolvere in $\mathbb{R}$ l'equazione seguente:

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}} = \frac{4x^2+7x-2}{2x^2+x-3}.$$

Risposta: $x = -\dfrac{1}{2}$.

7. Risolvere la seguente disequazione trigonometrica

$$\frac{\cos 4x + \sin 3x - \cos 2x}{\operatorname{tg} x - 1} \geq 0.$$

Risposta: L'insieme delle soluzioni della disequazione appartenenti all'intervallo $[0,\, 2\pi]$ è il seguente

$$\mathbf{E} = \left[\frac{\pi}{6},\, \frac{\pi}{4}\right[\,\cup\, \left[\frac{\pi}{3},\, \frac{\pi}{2}\right[\,\cup\, \left[\frac{2\pi}{3},\, \frac{5\pi}{6}\right] \,\cup\, \left[\frac{4\pi}{3},\, \frac{3\pi}{2}\right[\,\cup\, \left[\frac{5\pi}{3},\, 2\pi\right].$$

L'insieme di *tutte le soluzioni* della disequazione si può quindi rappresentare nel seguente modo:

$$\{x + 2k\pi,\ \forall\, x \in E \wedge \forall\, k \in \mathbb{Z}\}.$$

8. Dati i punti $A(4/3, 0)$, $B(0, 2)$, $C(-3, 0)$ e $D(-5/3, -2)$, verificare che il quadrilatero $ABCD$ è un rettangolo. Inoltre, determinare le equazioni delle rette, parallele al lato AD, che dividono il rettangolo $ABCD$ in tre rettangoli aventi la stessa area.

Risposta: Risulta

a) retta(A, B): $y = -\frac{3}{2}x + 2 \parallel$ retta(C, D): $y = -\frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$;

b) retta(B, C): $y = \frac{2}{3}x + 2 \parallel$ retta(D, A): $y = \frac{2}{3}x - \frac{8}{9}$;

c) $\left(-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = -1 \;\Rightarrow\;$ retta$(A, B) \perp$ retta$(B, C) \;\Rightarrow\; \hat{B} = 90°$ e retta$(C, D) \perp$ retta$(D, A) \;\Rightarrow\; \hat{D} = 90°$

d) per 1) e 2) $ABCD$ è un parallelogramma;

e) per 3) e 4) il parallelogramma $ABCD$ è un rettangolo;

f) le rette richieste hanno equazione $y = \frac{2}{3}x + \frac{2}{27}$ e $y = \frac{2}{3}x + \frac{28}{27}$.

9. Sono date le due parabole di equazione $y = x^2$ e $x = y^2$. Se A e B sono i punti di incidenza delle parabole con la loro tangente in comune, determinare l'area del triangolo di vertici A, B e $C(1, 1)$.

Risposta: Risulta $A = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e $B = \left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$, avendo la retta tangente alla prima parabola in A e alla seconda in B equazione $x + y + \frac{1}{4} = 0$. L'area di ABC è $\frac{27}{32}$.

10. Nel trapezio $ABCD$ la base maggiore AB è lunga $3l$, la base minore CD misura $(3 - \sqrt{3})l$, la diagonale AC forma con la base maggiore un angolo di ampiezza $\pi/4$ e con il lato obliquo AD un angolo di $\pi/12$. Determinare le misure di AC, AD, CB e l'area del trapezio.

Risposta: Applicando il teorema dei seni al triangolo ACD, e ricordando che $\sin\frac{\pi}{12} = \sin 15° = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ si ottiene

$$\overline{AC} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,l = \frac{3(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\,l = 3\sqrt{2}\,l$$
$$\overline{AD} = \frac{2(3-\sqrt{3})}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,l = \frac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{4-2\sqrt{3}}}\,l = 2\sqrt{3}\,l\,;$$

applicando Carnot al triangolo ABC si ottiene $\overline{BC} = 3l$;
essendo $B\hat{A}D = \frac{\pi}{3} = 60°$, l'altezza di $ABCD$ è

$$h = \overline{AD}\sin\frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,l = 3l$$

(N.B.: $h = \overline{BC}$, sicché $ABCD$ è rettangolo in B e C);
area $ABCD = \frac{3l + (3-\sqrt{3})l}{2}\cdot 3l = \frac{18 - 3\sqrt{3}}{2}\,l^2$.

1.12 Prova scritta del 01/09/06

1. Verificare che i due seguenti numeri sono razionali e reciproci:

$$p = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{3}+2} - \frac{2\left(\sqrt{2}+3\right)}{9\left(\sqrt{2}-1\right)^2} + \sqrt{6} - \sqrt{3}\,,$$

$$q = \frac{\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}\left(2+\sqrt{3}\right)\left(\frac{1}{\left(2+\sqrt{5}\right)^2 + 2 - 4\sqrt{5}} - \frac{1}{2}\right).$$

Risposta: $p = -\frac{44}{9}$, $q = -\frac{9}{44}$.

2. Data l'equazione di secondo grado

$$(\lambda+1)x^2 - \lambda x + 2 - \lambda = 0\,,$$

determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ammette radici reali. Se x_1 e x_2 sono le radici reali dell'equazione, determinare per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ si ha che

$$(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 + 1 > 0\,.$$

Risposta: Per $\lambda \in \left]-\infty, \dfrac{2-2\sqrt{11}}{5}\right] \cup \left[\dfrac{2+2\sqrt{11}}{5}, +\infty\right[$; per gli stessi valori di λ.

3. Trovare le soluzioni, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, della seguente disequazione trigonometrica

$$4\,\mathrm{tg}\,x - \frac{3}{\mathrm{tg}\,x} + 1 < 0\,.$$

Risposta: $x \in \left]0, \mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{4}\right[\,\cup\, \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{4}\pi\right[\,\cup\, \left]\pi, \pi + \mathrm{arctg}\,\dfrac{3}{4}\right[\,\cup\, \left]\dfrac{3}{2}\pi, \dfrac{7}{4}\pi\right[$.

4. Scomporre in fattori il polinomio $P(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 80$ e usare la scomposizione per semplificare la funzione razionale

$$f(x) = \frac{P(x)}{2x^2 + 9x - 5}\,.$$

Risposta: $x^3 - 3x^2 - 24x + 80 = (x-4)^2(x+5)$; $f(x) = \dfrac{(x-4)^2}{2x-1}$.

5. Risolvere la seguente disequazione:

$$\sqrt{\frac{|x+1| + 2x - 1}{x-3}} > 1\,.$$

Risposta: $x \in]3, +\infty[$.

6. Trovare le soluzioni della seguente equazione irrazionale:

$$\sqrt{\sqrt{x^2+8} - 2} = x\,.$$

Risposta: $x = 1$.

7. Risolvere la seguente equazione trigonometrica

$$\frac{1}{1-\cos^2 x} - \frac{1}{1+\cos^2 x} = \frac{4}{3}\,.$$

Risposta: $x \in \left\{\dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

8. Nel piano cartesiano sono dati i punti $A(-1,1)$ e $B(5,3)$ e la retta r di equazione $x-y=3$. Scrivere l'equazione del luogo descritto dal baricentro del triangolo ABP, con P punto che percorre la retta r.
Risposta: $y = x - 1$.

9. Trovare le equazioni delle tangenti comuni alla parabola $x = -y^2$ e alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2x = 0$.
Risposta: $y = -\dfrac{\sqrt{6}}{12}x + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\,, \quad y = \dfrac{\sqrt{6}}{12}x - \dfrac{\sqrt{6}}{2}\,, \quad x = 0.$

10. Un triangolo ABC è acutangolo e si sa che l'angolo $\hat{A}$ misura $\dfrac{\pi}{3}$ e i lati AB e BC sono lunghi rispettivamente $\sqrt{2}$ e $3-\sqrt{3}$. Trovare le misure degli angoli $\hat{B}$ e $\hat{C}$ e la lunghezza del lato AC. (Si tenga conto che $(2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3}$).
Risposta: $\hat{B} = \dfrac{\pi}{4}\,, \quad \hat{C} = \dfrac{5}{12}\pi\,, \quad \overline{AC} = \sqrt{6} - \sqrt{2}.$

1.13 Prova scritta del 13/10/06

1. Posto $a = 15$ e $b = \sqrt{213} + 2\sqrt[3]{1620 - 111\sqrt{213}}$, trovare quale delle seguenti relazioni è corretta:

$$a < b, \quad a = b, \quad a > b\,.$$

Risposta: $a = b$.

2. Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x-1}} - \frac{3x}{2x-4} + \frac{11}{6} > 0\,.$$

Risposta: $x \in \left]-\infty, -\dfrac{1}{4}\right[\;\cup\;]0,1[\;\cup\;]1,2[\;\cup\;]3,+\infty[.$

3. Trovare le soluzioni della seguente equazione:

$$\sqrt{(x^2-1)^3} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}\,.$$

Risposta: $x \in \left\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\right\}$.

4. Trovare le soluzioni, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, della seguente disequazione trigonometrica:

$$2\sin x\,\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} + \sin x \geq 2\cos x\,.$$

Risposta: $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right[\;\cup\; \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{5}{4}\pi\right]$.

5. Risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{4}{\sqrt{2-x}} - \sqrt{2-x} < 2\,.$$

Risposta: $x \in \left]-\infty, -4+2\sqrt{5}\right[$.

6. Sul segmento AB, con $A(-2,3)$ e $B(1,4)$, determinare le coordinate di un punto P tale che $\overline{AP} = \dfrac{3}{5}\,\overline{PB}$.
Risposta: $P\left(-\dfrac{7}{8}, \dfrac{27}{8}\right)$.

7. Il triangolo PQR è rettangolo in Q e ha i cateti di lunghezza $\overline{PQ} = 14$ e $\overline{QR} = 48$. Se M è il punto medio di PR, determinare il coseno dell'angolo $M\hat{Q}P$.
Risposta: $\dfrac{7}{25}$.

8. Nel piano cartesiano, per ogni $t \in]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[$, è dato il punto

$$Q(t)\left(t, \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}\right)\,.$$

Dette $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$ le proiezioni ortogonali di $Q(t)$ sugli assi, sia $P(t)$ la proiezione ortogonale dell'origine $O(0,0)$ sulla retta passante per $Q_x(t)$ e $Q_y(t)$. Verificare che $P(t)$ appartiene a una circonferenza di cui si chiede l'equazione.
Risposta: $x^2 + y^2 = 1$.

9. Determinare le equazioni delle rette passanti per il punto $A(1,1)$ che, con gli assi coordinati x, y, individuano nel primo quadrante triangoli di area $\dfrac{9}{4}$. Verificato che tali rette hanno equazione

$$y = -2x + 3 \quad \text{e} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}\,,$$

determinare i punti della retta di equazione

$$y = -\frac{1}{2}x + 3$$

che sono equidistanti dalle altre due rette.
Risposta: $(2,2)$ e $(-2,4)$.

10. Calcolare la differenza tra l'area dell'esagono regolare circoscritto a una circonferenza di raggio r e l'area del triangolo equilatero inscritto nella medesima circonferenza.
Risposta: $\dfrac{5}{4}\sqrt{3}r^2$.

1.14 Prova scritta del 05/12/06

1. Semplificare la rappresentazione del seguente numero intero:

$$n = \sqrt{\frac{1 + 2\sin\left(\frac{123}{4}\,\pi\right)}{\sqrt{2}-1}} \cdot \left(9 - 6\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{16}{3}\,\pi\right) .$$

Risposta: $n = 3$.

2. Qual è il minimo numero di quadrati di lato $l = 3\sqrt{2}\,a$ la cui unione contiene un segmento di lunghezza $31a$?
Risposta: 6.

3. Risolvere la seguente equazione:

$$\sqrt{\sqrt{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x-1}}} = \sqrt{x} .$$

Risposta: $x = 2$.

4. Dopo aver verificato che

$$\sqrt{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7}{16}}} = \frac{1}{4}\left(\sqrt{7} \pm 1\right) ,$$

si consideri un angolo convesso α tale che $\cos\alpha = -\dfrac{1}{8}$. Determinare:

$$\sin\alpha\,, \quad \cos\left(\frac{1}{4}\,\alpha\right) , \quad \sin\left(\frac{1}{4}\,\alpha\right) , \quad \cos\left(\frac{5}{4}\,\alpha\right) .$$

Risposta: $\sin\alpha = \dfrac{3}{8}\sqrt{7}$, $\cos\left(\dfrac{1}{4}\,\alpha\right) = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{7}+1\right)$, $\sin\left(\dfrac{1}{4}\,\alpha\right) = \dfrac{1}{4}\left(\sqrt{7}-1\right)$, $\cos\left(\dfrac{5}{4}\,\alpha\right) = \dfrac{\sqrt{7}-11}{16}$.

5. Verificare che l'equazione $x^3 - x^2 - x - 2 = 0$ ha una soluzione intera e risolvere il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} \big|\,|x| - 1\big| \geq 2 \\ x(x^2-1) > x^2 + 2 \end{cases} .$$

Risposta: Soluzione intera: $x = 2$. Soluzioni sistema: $x \in [3, +\infty[$.

6. Verificare che l'equazione $2t^3 + t^2 + t - 1 = 0$ ha una soluzione razionale e trovare, nell'intervallo $\left[0, \frac{5}{2}\pi\right]$, le soluzioni della seguente disequazione trigonometrica:

$$\frac{2\sin^2 x + 3\sin x - 2}{2\cos^3 x + \cos x - \sin^2 x} \geq 0 .$$

Risposta: Soluzione razionale: $t = \dfrac{1}{2}$.

Soluzioni disequazione: $x \in \left[\dfrac{1}{6}\pi, \dfrac{1}{3}\pi\right[\cup \left[\dfrac{5}{6}\pi, \dfrac{5}{3}\pi\right[\cup \left[\dfrac{13}{6}\pi, \dfrac{7}{3}\pi\right[$.

7. Nel piano cartesiano Oxy sono assegnate le circonferenze di equazioni:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0\,, \quad (x+1)^2 + y^2 = r^2\,.$$

Determinare r in modo che una tangente comune alle due circonferenze sia parallela alla retta di equazione $y - x = 0$.
Risposta: $r_1 = \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$, $r_2 = \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$.

8. Il lato non obliquo AD e la base minore DC di un trapezio rettangolo $ABCD$ hanno la stessa lunghezza l. Inoltre, i punti M e H sono rispettivamente il punto d'incontro delle diagonali e la sua proiezione ortogonale sulla base maggiore AB. Risolvere il triangolo DMC sapendo che $\overline{MH} = \frac{2}{3}\,l$.
Risposta: $\overline{DM} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}l$, $\overline{MC} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}l$, $\cos(D\hat{M}C) = -\dfrac{\sqrt{10}}{10}$, $\sin(C\hat{D}M) = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $\sin(D\hat{C}M) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Nel piano sono dati i punti $A(1,1)$ e $B(-1,2)$. Dopo avere verificato che il luogo dei punti P tali che $\overline{AP}^2 = \frac{1}{2}\overline{BP}^2$ è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 6x - 1 = 0$, determinare l'area dell'ottagono circoscritto alla circonferenza.
Risposta: $a = 80\big(\sqrt{2} - 1\big)$.

10. Nel piano cartesiano Oxy sono dati la parabola $y = x^2$ e il fascio di rette di equazione $y = mx + 2 - m$.

a) Verificare che per ogni $m \in \mathbb{R}$ le rette del fascio incontrano la parabola in due punti distinti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$.

b) Se A e B sono i punti del quesito a), determinare i valori di $m \in \mathbb{R}$ tali che

$$x_1 + x_2 = \frac{1}{2}\,x_1^2 x_2^2 - 2\,.$$

Per questi valori di m, determinare le coordinate di A e B.

Risposta: $m = 0,\ A\big(-\sqrt{2}, 2\big),\ B\big(\sqrt{2}, 2\big)$; $m = 6,\ A\big(3+\sqrt{5}, 14+6\sqrt{5}\big),\ B\big(3-\sqrt{5}, 14-6\sqrt{5}\big)$.

1.15 Prova scritta del 19/03/07

1. Verificare che il numero

$$\alpha = \sqrt[3]{20 + \sqrt{392}} + \sqrt[3]{20 - \sqrt{392}}$$

è un intero positivo.
Risposta: $\alpha = 4$.

2. Dati i polinomi a coefficienti reali

$$f(x) = x^3 + bx^2 + ax + b - 1 \quad \text{e} \quad g(x) = x^3 + (a+1)x^2 + 2bx + a\,,$$

determinare a e b in modo che

$$\text{M.C.D.}\big(f(x), g(x)\big) = x^2 + x + 1\,.$$

Risposta: $a = b = 1$.

3. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{\sqrt{x-1}+1} \leq \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,.$$

Risposta: $x \in \{1\} \,\cup\, [2, +\infty[$.

4. Risolvere l'equazione

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x-4} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - 1\,.$$

Risposta: $x = 1$.

5. Risolvere l'equazione trigonometrica nell'intervallo $[0, \pi]$

$$\sin(x+\pi) + \sin 2x = \cos\left(\frac{x-\pi}{2}\right)\,.$$

Risposta: $x \in \left\{0, \frac{2}{9}\pi\right\}$.

6. Data l'equazione

$$2x^2 + (k+1)x - k = 0\,,$$

Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione ha radici reali x_1 e x_2 tali che

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Risposta: $k = 1$.

7. Siano dati, nel piano cartesiano, i punti $A(-2,-5)$, $B(-5,-2)$ e $C(-2,-1)$. Determinare l'equazione dell'asse del segmento AB e il punto D tale che il quadrilatero $ABCD$ sia un trapezio isoscele.
Risposta: Asse: $y = x$; $D(-1,-2)$.

8. Determinare l'equazione della parabola, con l'asse parallelo all'asse y, che ha il vertice nel punto $V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{13}{4}\right)$ ed è tangente alla retta di equazione $y = x - 3$.
Risposta: $y = x^2 + x - 3$.

9. La base maggiore AB di un trapezio rettangolo $ABCD$ è quattro volte l'altezza e la base minore CD è lunga $4l$. Sapendo che il seno dell'angolo compreso tra la base maggiore e la diagonale minore è $\frac{1}{3}$, calcolare l'area e il perimetro del trapezio.
Risposta: $p = \left[4 + 5\sqrt{2} + \sqrt{50 - 32\sqrt{2}}\right] l\,;\ a = 2\left(2 + \sqrt{2}\right) l^2$.

10. Determinare l'equazione cartesiana del luogo dei punti del piano la cui distanza dal punto A di coordinate $(-1, 0)$ è tre volte la distanza dalla retta di equazione $y = -x+2$.
Risposta: $7x^2 + 7y^2 + 18xy - 40x - 36y + 34 = 0$.

1.16 Prova scritta del 14/05/07

1. Dopo averne stabilito il dominio, semplificare la seguente funzione razionale:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 4x - 12}{x^4 - 5x^2 - 36}\,.$$

Risposta: Dominio: $x \in]-\infty, -3[\cup]-3, 3[\cup]3, +\infty[$; $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$.

2. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$:

$$\sqrt{\sqrt{x} - 1} \geq \sqrt{x^2 - \frac{3}{2}\,x + \frac{1}{2}}\,.$$

Risposta: $x = 1$.

3. Risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} = \frac{x+3}{x^2 - 1}\,.$$

Risposta: $x = 2$.

4. Risolvere l'equazione nell'intervallo $\left]0, \frac{5}{2}\,\pi\right]$:

$$\sqrt{\sin x} + \sqrt{2 - \sin x} = \frac{2}{\sqrt{2 - \sin x}}\,.$$

Risposta: $x \in \left\{\frac{1}{2}\pi, \pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi\right\}$.

5. Risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$:

$$\left(\sin(x-2\pi)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)^2=\frac{1+\cos 3x}{2}\,.$$

Risposta: $x \in \{\pi+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}\ \cup\ \left\{\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$.

6. Risolvere la disequazione in $[0, 2\pi]$:

$$\frac{\sin x+\cos x-1}{2\sin^2 x+(4-\sqrt{2})\sin x-2\sqrt{2}}>0\,.$$

Risposta: $x \in \left]\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{2}\pi\right[\ \cup\ \left]\frac{3}{4}\pi, 2\pi\right[$.

7. Un quadrato, che non ha punti in comune con gli assi coordinati, ha lato $l = 2\sqrt{2}$, un vertice nel punto $A\left(\frac{9}{4},\frac{1}{4}\right)$ e due lati paralleli alla retta di equazione $x+y+2=0$. Determinare gli altri tre vertici.
Risposta: $B\left(\frac{17}{4},\frac{9}{4}\right)$, $C\left(\frac{9}{4},\frac{17}{4}\right)$, $D\left(\frac{1}{4},\frac{9}{4}\right)$.

8. Sono dati i punti $A(-1,2)$ e $B(3,0)$ e la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y=x^2+1$. Determinare il luogo $\mathcal{L}$ dei baricentri del triangolo che ha un vertice sulla parabola e gli altri vertici nei punti A e B. Determinare inoltre i punti di intersezione tra $\mathcal{P}$ ed $\mathcal{L}$.
Risposta: Luogo: $y=3x^2-4x+\frac{7}{3}$; punti di intersezione: $\left(\frac{3\pm\sqrt{3}}{3},\frac{7\pm2\sqrt{3}}{3}\right)$.

9. Assegnati nel piano i punti $A(-1,0)$, $B(5,0)$ e $C(2,4)$, determinare il centro, il raggio e l'equazione della circonferenza tangente al lato AB e ai prolungamenti dei lati CA e CB.
Risposta: $(2,-6)$; 6; $x^2+y^2-4x+12y+4=0$.

10. Su una semicirconferenza che ha diametro AB di lunghezza d, si prenda un punto P e lo si congiunga con gli estremi A e B del diametro. Sul lato AP si costruisca, esternamente al triangolo APB, il quadrato $APQR$. Se x è la misura dell'angolo $B\hat{A}P$, determinare x in modo che l'area del trapezio $ABQR$ valga $\frac{3}{4}d^2$.
Risposta: $x=\frac{\pi}{4}$.

1.17 Prova scritta del 20/07/07

1. Scrivere l'equazione della circonferenza passante per i punti $A(2,3)$, $B(5,0)$ e $C(1,1)$.
Risposta: $3x^2+3y^2-19x-7y+20=0$.

2. Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$\sqrt{x^2-5}+1 \leq x\,.$$

Risposta: $x \in \left[\sqrt{5}, 3\right]$.

3. Dato il sistema

$$\begin{cases} x^2+y^2=2a \\ x+y=2 \end{cases},$$

determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ la soluzione (x,y) del sistema soddisfa la condizione $x=3y$.
Risposta: $a=\dfrac{5}{4}$.

4. Date le curve $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ rispettivamente di equazioni

$$3x^2+2y^2-5=0 \quad \text{e} \quad y=x^2\,,$$

trovare l'area del poligono che ha per vertici i punti di incontro delle 2 curve e i punti di intersezione della prima con l'asse x.
Risposta: $a=\sqrt{\dfrac{5}{3}}+1$.

5. Risolvere nell'intervallo $[-\pi,\pi]$ la disequazione

$$\sin^2 x-\sin x+\cos x-\sin x\cos x \geq 0\,.$$

Risposta: $x \in \left[-\dfrac{3}{4}\pi, \dfrac{1}{4}\pi\right] \cup \left\{\dfrac{1}{2}\pi\right\}$.

6. Siano $\overline{AB}=c$ e $\overline{AC}=2\sqrt{6}c$ le misure dei cateti di un triangolo rettangolo. La bisettrice dell'angolo $\gamma=A\hat{C}B$ incontra l'altezza relativa all'ipotenusa in un punto M; determinare $\overline{AM}$ in funzione di c.
Risposta: $\left(10\sqrt{6}-24\right)c$.

7. Determinare a e b in modo che il polinomio a coefficienti reali

$$P(x)=x^3+ax^2+x+b$$

abbia $x=1$ come radice doppia. Per questi valori semplificare la frazione

$$\frac{x^3+ax^2+x+b}{x^4+2x^2-3}\,.$$

Risposta: $a=-2,\ b=0$; frazione semplificata: $\dfrac{x(x-1)}{(x^2+3)(x+1)}$.

8. Risolvere rispetto alla variabile $x \in \mathbb{R}$, assumendo $k \in \mathbb{R}$ come parametro, l'equazione

$$kx = \sqrt{-k\big(1 + |x|\big)}\,.$$

Per quali valori di k l'equazione è indeterminata?

Risposta: Se $k = 0$ l'equazione è indeterminata. Se $k < 0$ $x = \dfrac{1 + \sqrt{1 - 4k}}{2k}$.

9. Scrivere l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}$ di centro $C(0, 1)$ e raggio $r = 1$. Se $A \neq O(0, 0)$ e B sono, rispettivamente, i punti di intersezione della retta $y = kx$ con la circonferenza $\mathcal{C}$ e la retta $y = 2$, determinare il funzione di $k \in \mathbb{R}$ il luogo geometrico dei punti $P(x_B, y_A)$ e calcolare k in modo che $x_B y_A \geq \sqrt{3}$. Passare infine all'equazione cartesiana del luogo richiesto.

Risposta: $x^2 + y^2 - 2y = 0\,;$ $\quad \begin{cases} x = \dfrac{2}{k} \\ y = \dfrac{2k^2}{1 + k^2} \end{cases}$ $\;;\quad k \in \left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \sqrt{3}\right]\;;\quad y = \dfrac{8}{4 + x^2}\,.$

10. Per ogni intero positivo n, risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente equazione

$$\frac{1}{\sqrt[n]{x} + 2} + \frac{2\sqrt[n]{x} + 3}{\sqrt[n]{x} + 3} = \frac{3}{2}\,.$$

Risposta: Per n pari, $x = 0$; per n dispari, $x \in \{-1, 0\}$.

1.18 Prova scritta del 05/10/07

1. Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il polinomio

$$P(x) = (x - 1)(x^2 - a^2)(x^2 - a - 1)$$

è divisibile per $x^2 + x - 2$?

Risposta: $a \in \{2, -2, 3\}$

2. Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$\sqrt{x^2 - x + 1} > 2x^2 - 1$$

Risposta: $x \in \left]-\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\,, 1\right[$

3. Trovare la relazione tra i parametri b e c in modo che la parabola $\mathcal{C}_1$ di equazione $y = \frac{1}{2}x^2 + bx + c$ passi per il vertice della parabola $\mathcal{C}_2$ di equazione $y = x^2 + 2x$. Indicato con P l'altro punto comune alle due parabole, scrivere l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto medio M del segmento VP.

Risposta: $y = 2x^2 + 4x + 1$

4. Risolvere l'equazione

$$5\sin^2 x - \sqrt{3}\sin 2x - \cos^2 x = 2 \qquad x \in \mathbb{R}$$

Risposta: $x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi \vee x = -\dfrac{\pi}{6} + k\pi$

5. Sono date le funzioni $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ e $g(x) = \left|x + \frac{1}{2}\right| - \frac{3}{2}$. Stabilire per quali valori di $x \in \mathbb{R}$ si ha

a) $f(x) > 0$ e $g(x) < 0$,

b) $f(x) > 0$ oppure $g(x) > 0$.

Risposta: **a**) Nessun x; **b**) $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.

6. Siano A, B, C e D i vertici consecutivi di un quadrilatero convesso inscritto nella circonferenza di diametro $\overline{BD} = 9a$. La tangente alla circonferenza nel punto A è perpendicolare alla retta CD e sia E il loro punto di incontro. Sapendo che

$$\overline{EA} = 2a\sqrt{5} \quad , \quad ED + EC = BD \quad , \quad A\hat{B}D = D\hat{A}E\,,$$

determinare il perimetro del quadratilatero $ABCD$.
(Suggerimento: posto $\overline{ED} = x, \ldots$).

Risposta: $\left(7 + 7\sqrt{5}\right) a$

7. Trovare l'area del trapezio rettangolo $ABCD$ sapendo che $\overline{AB} = 3a$, $\hat{A} = \hat{D} = \frac{\pi}{2}$, $\cos B\hat{A}C = \frac{1}{\sqrt{13}}$ e $CB = 2HB$, essendo H la proiezione di C sulla base AB.

Risposta: $4\sqrt{3}a^2$

8. Risolvere la disequazione

$$\frac{\cos x - \sin x}{\mathrm{tg}^2\, x - 1} \geq 0\,, \quad 0 \leq x \leq 2\pi\,.$$

Risposta: $x \in \left]\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{7\pi}{4}\right[$

9. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{5 + 4x} < 3 + |2x|\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Risposta: $x \in \left[-\dfrac{5}{4}, +\infty\right[$

10. In una circonferenza di diametro $2r$ si considerino due corde consecutive AB e BC, di lunghezza rispettivamente r e $\frac{2r}{\sqrt{3}}$, tali che l'angolo $A\hat{B}C$ sia ottuso. Calcolare la lunghezza della corda AC.

Risposta: $\overline{AC} = \sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{6}}{3}}\, r$

1.19 Prova scritta del 03/12/07

1. Determinare $r > 0$ in modo che l'area del quadrilatero, i cui vertici sono i punti (x, y) del piano che soddisfano l'equazione

$$(x^2 + y^2 - r^2)^2 + (xy - x^2)^2 = 0\,,$$

sia uguale a 4.

Risposta: $\sqrt{2\sqrt{2}}$

2. Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$2y^2 \leq 1 + \sqrt{y^2 - y + 1}\,.$$

Risposta: $x \in \left[-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,,\, 1\right]$

3. Trovare le coppie di numeri interi relativi successivi tali che, sottraendo al loro prodotto la loro somma moltiplicata per 51, si ottenga 51.

Risposta: $(-1, 0)\,,\,(102, 103)$

4. Risolvere l'equazione

$$\sin x - \sin 5x = \cos 3x \qquad 0 \leq x \leq 2\pi\,.$$

Risposta: $x \in \left\{\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{3\pi}{6}\,,\,\frac{5\pi}{6}\,,\,\frac{7\pi}{6}\,,\,\frac{9\pi}{6}\,,\,\frac{11\pi}{6}\,,\,\frac{7\pi}{12}\,,\,\frac{11\pi}{12}\,,\,\frac{19\pi}{12}\,,\,\frac{23\pi}{12}\right\}$

5. Per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ le equazioni

$$x^3 + kx + 2 = 0 \quad \text{e} \quad x^3 + x + 2k = 0$$

hanno una soluzione in comune?

Risposta: $k = 1\,, k = -5$

6. Siano A, B, C e D i vertici consecutivi di un quadrilatero non intrecciato inscritto nella circonferenza di diametro $\overline{BD} = 18r$. La tangente alla circonferenza nel punto A è perpendicolare alla retta CD e sia E il loro punto di incontro. Sapendo che

$$\overline{EA} = 4r\sqrt{5} \quad , \quad ED + EC = BD \quad , \quad A\hat{B}D = D\hat{A}E\,,$$

determinare il perimetro del quadratilatero $ABCD$.

(Suggerimento: posto $\overline{ED} = x, \ldots$).

Risposta: $\left(14 + 14\sqrt{5}\right) r$

7. Sia C il centro di un cubo di spigolo $\overline{AB} = l$. Trovare gli angoli e i lati del triangolo ABC.

Risposta: $\cos \hat{A} = \cos \hat{B} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\,,\ \cos \hat{C} = \dfrac{1}{3}\,;\ \overline{AB} = l\,,\ \overline{AC} = \overline{BC} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} l$

8. Risolvere la disequazione

$$\frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{ctg}^2 x} \leq 0\,, \qquad -\pi \leq x \leq \pi\,.$$

Risposta: $x \in \left]-\pi, -\dfrac{3\pi}{4}\right[\cup \left]-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}\right[\cup \left]\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right[$

9. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{5 - 4x} - |2x| < 3 \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Risposta: $x \in \left]-\infty, \dfrac{5}{4}\right[$

10. In una circonferenza di diametro $4d$ si considerino due corde consecutive AB e BC, di lunghezza rispettivamente $2d$ e $\frac{4d}{\sqrt{3}}$, tali che l'angolo $A\hat{B}C$ sia ottuso. Calcolare la lunghezza della corda AC.

Risposta: $\overline{AC} = \sqrt{\dfrac{5 + 2\sqrt{6}}{3}}\, 2d$ o, meglio, $\overline{AC} = \sqrt{\dfrac{20 + 8\sqrt{6}}{3}}\, d$

1.20 Prova scritta del 17/03/08

1. Nel piano cartesiano Oxy trovare l'equazione della parabola passante per i 3 punti $A(-1, 1)$, $B(-3, 1)$ e $C(-2, 3)$. Tracciarne il grafico.

Risposta: $y = -2x^2 - 8x - 5$.

2. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione

$$\sqrt{x} - \sqrt{x + 3} > -1\,.$$

Risposta: $x \in]1, +\infty[$.

3. Data la circonferenza $x^2 + y^2 - 2x = 0$, trovare le equazioni delle rette tangenti passanti per il punto $A(0, 2)$.

Risposta: $x = 0\,;\ y = -\dfrac{3}{4}x + 2$.

4. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione

$$\frac{x^3+x^2-5x+3}{2x^2-x-1} \leq 0\,.$$

Risposta: $x \in]-\infty, -3] \cup \left]-\frac{1}{2}, 1\right[$.

5. La retta r passa per $A(0,3)$ e interseca l'asse x nel punto $P(p,0)$ in modo che la semiretta PA forma un angolo di $2\pi/3$ col semiasse positivo delle ascisse. Scrivere l'equazione di r e le coordinate del punto P.

Risposta: $r\colon y = -\sqrt{3}x + 3$; $P = (\sqrt{3}, 0)$.

6. Risolvere nell'intervallo $[0, 3\pi]$ la seguente equazione

$$\frac{1-\cos 2x}{\sin x} - \frac{1+\cos 2x}{\cos x} = 0\,.$$

Risposta: $x \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right\}$.

7. Il triangolo PQR è rettangolo in Q e ha i cateti di lunghezza $\overline{PQ} = 14$ e $\overline{QR} = 48$. Se M è il punto medio di PR, determinare il coseno dell'angolo $M\hat{Q}P$.

Risposta: $\cos M\hat{Q}P = \frac{24}{25}$.

8. Calcolare l'espressione

$$(3+2|x|)^{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$$

per $x = -\sqrt{2}$ e verificare che si ottiene un numero intero.

Risposta: 1.

9. In un triangolo ABC si ha $\overline{AC} = a$, $\overline{BC} = 2a$ e $A\hat{C}B = 2\pi/3$. Calcolare $\overline{AB}$ e trovare il raggio della circonferenza circoscritta.

Risposta: $\overline{AB} = \sqrt{7}a$, $r = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}}a$.

10. Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x \geq \sqrt{3}\,.$$

Risposta: $x \in \bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \pi + 2k\pi\right]$.

1.21 Prova scritta del 22/05/08

1. Ad un cerchio di centro O si conducono due tangenti dagli estremi di un suo diametro. Dette A e B le intersezioni con una terza tangente, dimostrare che il triangolo AOB è rettangolo. Inoltre, sapendo che $\overline{OA} = 7$ e $\overline{OB} = 24$, determinare il raggio del cerchio.

Risposta: $r = \dfrac{168}{25}$.

2. Risolvere nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la seguente equazione

$$\frac{1 - \cos 2x}{\sqrt{2}\sin x} = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}\,.$$

Risposta: $x \in \left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right\}$.

3. Sia data la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = x^2 + 2x + 1$. Determinare e disegnare il luogo $\mathcal{L}$ dei punti medi delle corde individuate dalla parabola con le rette del fascio di centro l'origine. Infine trovare i punti di intersezione tra $\mathcal{L}$ e $\mathcal{P}$.

Risposta: Il luogo è costituito dai due rami della parabola $y = 2x^2 + 2x$, con $x \in\,]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. I punti di intersezione sono $(-1, 0)$ e $(1, 4)$.

4. Risolvere in $\mathbb{R}$ il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} \sqrt{4 - x^2} \leq 1 \\ 2 + 3x > \sqrt{x - 2} \end{cases}\,.$$

Risposta: $x = 2$.

5. Stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il polinomio

$$P(x) = x^4 + 2x^3 + (2k - 1)x^2 + kx + 1$$

è divisibile per x^2+x+1. Per ogni valore di k trovato scomporre in fattori il polinomio.

Risposta: $k = 2$; $P(x) = (x^2 + x + 1)^2$

6. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente disequazione

$$2\sqrt{3}\cos^2 x - \sin 2x < \sqrt{3}\,.$$

Risposta: $x \in \displaystyle\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{2\pi}{3} + k\pi\right]$.

7. Un trapezio isoscele di base maggiore AB e base minore CD è circoscritto a una circonferenza di centro O. Determinare il raggio della circonferenza, sapendo che l'angolo in A vale $\pi/3$ e che l'area del trapezio vale $24\sqrt{3}$.

Risposta: $r = 3$.

8. Risolvere l'equazione

$$\frac{x}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{x+1}{2x+1}$$

nell'insieme dei numeri reali x per cui l'equazione ha significato.

Risposta: $x = 1$.

9. Siano dati la retta r di equazione $x - y - 1 = 0$ e il punto $A(2,3)$. Se A' è il simmetrico di A rispetto a r, determinare l'area del triangolo OAA'.

Risposta: Area = 5.

10. Dato il polinomio

$$P(x) = (k+3)x^2 + kx + 1\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

trovare i valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ in modo che, dette x_1 e x_2 le radici di P, si abbia

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\,.$$

Risposta: $k = -2$; $k = \dfrac{-5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

1.22 Prova scritta del 23/06/08

1. Nel piano si consideri il punto $P(3,1)$. Determinare le equazioni delle rette r del fascio di centro l'origine degli assi tali che, detta H la proiezione ortogonale di P su r, l'area del triangolo OPH sia pari a 2.

Risposta: $y = x$, $y = -x$, $y = 7x$,$y = -\dfrac{1}{7}y$.

2. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente equazione

$$|9x^2 - 1|(x^2 + 1) = 16x^2\,.$$

Risposta: $x \in \{-1,\, 1,\, \pm\sqrt{\dfrac{-12+\sqrt{153}}{9}}\}$.

3. Sia data la parabola di equazione $y = x^2$. Determinare l'equazione della circonferenza con centro sull'asse y, tangente alla parabola e tale che la corda determinata dai due punti di tangenza abbia lunghezza 4.

Risposta: $x^2 + y^2 - 9y + 16 = 0$.

4. Servendosi della somma e del prodotto dei numeri reali

$$a = \sqrt{3} + 1 - \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} \quad \text{e} \quad b = \sqrt{3} + 1 + \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}$$

stabilire se a e b sono entrambi razionali, entrambi irrazionali o di tipo diverso. Nell'ultima eventualità si precisi quale è razionale e quale non lo è. (Metodo alternativo: usare le formule dei radicali doppi).

Risposta: $a = 2$ (razionale), $b = 2\sqrt{3}$ (irrazionale).

5. Sono dati due cerchi concentrici di raggi r e $R(r) = \sqrt{r^2 + |r^2 - ar|}$ con $0 \leq r \leq a$. Trovare per quali valori di r l'area della corona circolare è massima.

Risposta: $r = \dfrac{a}{2}$.

6. Risolvere la seguente disequazione

$$\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x \geq 1$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Risposta: $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\pi, 4\dfrac{\pi}{3}\right]$.

7. Siano ABC un triangolo rettangolo in A, e D il punto del cateto AC equidistante da B e C. Se a è la lunghezza dell'ipotenusa BC e l'area del triangolo BCD è pari a $\frac{a^2}{4\sqrt{3}}$, determinare l'angolo $A\hat{B}D$.

Risposta: $A\hat{B}D = \dfrac{\pi}{6}$.

8. Risolvere in $\mathbb{R}$ il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} (x-4)^3 > 0 \\ x(x-3) > 4 \end{cases} .$$

Risposta: $x > 4$.

9. Rispetto a un sistema di riferimento Oxy, determinare l'equazione del luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ la cui distanza dal punto $O(0, 0)$ è doppia della distanza dal punto $A(1, 0)$ e infine rappresentarlo graficamente.

Risposta: $3x^2 + 3y^2 - 8x + 4 = 0$; è il circolo di centro $\left(\dfrac{4}{3}, 0\right)$ e raggio $\dfrac{2}{3}$.

10. Risolvere in $\mathbb{R}$ l'equazione

$$\sqrt{x+2} = \sqrt[3]{4x+5}\,.$$

Risposta: $x \in \left\{-1, \dfrac{11 + \sqrt{189}}{2}\right\}$

1.23 Prova scritta del 21/07/08

1. Il triangolo ABC di lati $\overline{AC} = 3$, $\overline{BC} = 4$ e $\overline{AB} = 5$ è inscritto in una circonferenza. Di ognuno dei due triangoli isosceli BCD con il vertice D sulla circonferenza calcolare il perimetro $2p$ e l'area a.

Risposta: $p = 3 + 2\sqrt{2}$ e $a = \dfrac{3}{4}$; $p = 3 + 3\sqrt{10}$ e $a = \dfrac{27}{4}$.

2. Scomporre in fattori irriducibili il polinomio

$$P(a, x, y) = a^2x^5y - xy^3$$

e calcolarne il valore per $a = -4$, $x = \dfrac{1}{2}$ e $y = -2$.

Risposta: $P(a, x, y) = xy(ax^2 - y)(ax^2 + y)$; $P(-4, \frac{1}{2}, -2) = -\dfrac{1}{2}$.

3. Data la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $y = x^2 - 4x + 3$, scrivere l'equazione della retta r tangente a $\mathcal{P}$ nel punto $(1, 0)$ e quella della retta s tangente a $\mathcal{P}$ e ortogonale a r.

Risposta: $r\colon y = -2x + 2$; $s\colon y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{33}{16}$.

4. Trovare due numeri reali a e b tali che

$$\begin{cases} a + b & = & -6 \\ \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} & = & \dfrac{2}{105} \end{cases} .$$

Risposta: $a = 15$, $b = -21$ (oppure $b = 15$, $a = -21$).

5. Fra tutte le rette passanti per il punto $A(3, 0)$, determinare quella che interseca la retta r di equazione $3x - 4y = -16$ in un punto P che dista 5 da A. Verificare poi che la retta s trovata è ortogonale a r.

Risposta: $s\colon y = -\dfrac{4}{3}x + 4$; poiché $r\colon y = \dfrac{3}{4}x + 4$ e $\dfrac{3}{4} \cdot \left(-\dfrac{4}{3}\right) = -1$, le due rette sono ortogonali.

6. Risolvere nell'intervallo $[0, 2\pi]$ la seguente disequazione

$$|\sin x| \geq \cos x\,.$$

Risposta: $x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}\right]$.

7. Da un punto O esterno a una circonferenza di centro C si conducano la semiretta OC e la semiretta tangente nel punto A. Siano $d = \overline{OA}$ e $\alpha = A\hat{O}C$. Sapendo che $d = 6\sqrt{2}$ e $\sin\alpha = \dfrac{1}{3}$, calcolare il raggio r della circonferenza.

Risposta: $r = 3$.

8. Risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$

$$\sqrt{x+2} = x - 4\,.$$

Risposta: $x = 7$.

9. In un triangolo ABC si ha $\overline{AB} = 2a$, $\sin\alpha = \dfrac{2}{3}$ e $\sin\beta = \dfrac{1}{4}$, essendo $\alpha = C\hat{A}B$ e $\beta = C\hat{B}A$, con α e β acuti. Calcolare l'altezza h relativa ad AB.

Risposta: $h = \dfrac{4a}{(2\sqrt{3}+1)\sqrt{5}}$.

10. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$

$$x^2 + \frac{4\sqrt{2}x}{1-x^2} - 4\sqrt{2}x \geq 0\,.$$

Risposta: $x \in]-\infty, -1[\cup [2\sqrt{2}-3,\, 1[\cup [2\sqrt{2}+3,\, +\infty[$.

1.24 Prova scritta del 03/10/08

1. È dato un triangolo equilatero ABC di lato l in un piano α. Detto G il suo baricentro, sia d la retta per G ortogonale ad α. Calcolare

a) a che distanza da α deve trovarsi un punto $D \in d$ perché il triangolo ABD sia anch'esso equilatero;

b) la distanza di C da D.

Risposta: a) $d = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\,l$; b) $\overline{CD} = l$.

2. Trovare le soluzioni dell'equazione

$$\cos^2 x + (1-\sqrt{3})\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = 0$$

che appartengono all'intervallo $[-\pi/2, 3\pi/2]$.

Risposta: $x \in \left\{-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{6}\right\}$.

3. Data la circonferenza γ di equazione $x^2+y^2+10x+10y+25=0$, scrivere le equazioni delle rette r ed s tangenti a γ nei punti R ed S di ordinata -2. Calcolare il perimetro del triangolo formato da r, s e l'asse x.

Risposta: Il perimetro è $\dfrac{40}{3}$, le equazioni delle due rette sono $4x+3y-10=0$ e $4x-3y+30=$.

4. Trovare 3 numeri reali a, b e c tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valga la seguente identità

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + c)(x^2 + bx + c)\,.$$

Il polinomio a primo membro ammette radici reali?

Risposta: $a = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\ b = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ c = 1\ \vee a = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ b = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\ c = 1$. Il polinomio non ha radici reali.

5. Internamente tangenti a un cerchio $\mathcal{C}$ di centro O e raggio R vi sono due cerchi $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ di raggio r, i quali sono pure tangenti tra loro. Quanto vale il rapporto r/R se la retta dei centri di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ dista $R/2$ da O?

Risposta: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{3}{8}$.

6. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{4 - |x|} \le \sqrt{-x^2 + 7x - 6}$$

con $x \in \mathbb{R}$.

Risposta: $x \in [4 - \sqrt{6}\,,\,4]$.

7. La parabola $\mathcal{P}$ ha equazione $y = 2x(1-x)$. Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta r tangente a $\mathcal{P}$ nell'origine O, dalla retta s ortogonale ad r e tangente a $\mathcal{P}$ in un punto A, e dal segmento OA.

Risposta: L'area vale $\dfrac{125}{1024}$.

8. Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$\frac{4+x}{|5-2x|} < 1\,.$$

Risposta: $x \in \left]-\infty, \dfrac{1}{3}\right[\cup]9, +\infty[$.

9. Calcolare l'area del trapezio $ABCD$ sapendo che $\overline{AB} = 3a$, che gli angoli in A e D sono retti, che $A\hat{B}C = \pi/3$ e che $\cos B\hat{A}C = 1/\sqrt{2}$.

Risposta: $\dfrac{162 - 72\sqrt{3}}{8}\,a^2 \simeq 4.662a^2$.

10. Risolvere la disequazione

$$\frac{|\cos 2x|}{\sin x} < 1$$

per $x \in [0, 7\pi/2]$.

Risposta: $x \in \left]\dfrac{\pi}{6}\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup]\pi\,,\,2\pi[\cup \left]\dfrac{11\pi}{6}\,,\,\dfrac{5\pi}{2}\right[\cup \left]3\pi\,,\,\dfrac{7\pi}{2}\right[\,.$

1.25 Prova scritta del 19/01/09

1. Determinare l'area della superficie di una piramide $\mathcal{P}$ che ha per base un triangolo equilatero ABC di lato l e vertice il punto V tale che VA è l'altezza di $\mathcal{P}$ relativa alla base e ABV è un triangolo isoscele.

Risposta: $l^2\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

2. Trovare i coefficienti a, $b \in \mathbb{R}$ del trinomio

$$P(x) = ax^2 + bx + 1\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

sapendo che è divisibile per $x-1$ e il resto della divisione per $x-2$ è pari a 9.

Risposta: $a = 5 \wedge b = -6$.

3. Sia P un punto esterno alla circonferenza γ di centro O e raggio $r = 1$. Si traccino la semiretta PT tangente a γ in un punto T e l'altezza TH del triangolo OPT. Dimostrare che $\overline{OH} = 1/\overline{OP}$.

Risposta: Il primo teorema di Euclide applicato al triangolo OPT fornisce $\overline{OP}\cdot\overline{OH} = \overline{OT}$ $(= 1)$.

4. Risolvere la disequazione

$$\frac{\cos x - 1}{\sin x} \leq \sqrt{3}\,, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Risposta: $x \in]0,\pi[\,\cup\, \left[\dfrac{4}{3}\pi\,,\, 2\pi\right[$.

5. Si consideri una generica retta r del fascio di equazione $4x + 3y = k$, $k \in \mathbb{R}$, e siano A e B i punti d'incontro di r con gli assi x e y rispettivamente con origine in O. Se $\alpha = O\widehat{A}B$, calcolare $\mathrm{tg}(\alpha/2)$. Trovare $k \geq 0$ tale che l'area del triangolo OAB valga 27 e scrivere l'equazione della circonferenza inscritta in questo triangolo.

Risposta: $\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{2}$, $k = 18\sqrt{2}$.

6. Risolvere la disequazione

$$x^2 - x \geq \sqrt{2x^3 - 2x^2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x \in \{0, 1\} \,\cup\, [3, +\infty[$.

7. Data la parabola $\mathcal{P}$ con vertice in $V(-1, 1)$ e passante per l'origine, condurre dal punto $A(-2, 3)$ le rette tangenti a $\mathcal{P}$. Scrivere le equazione della parabola e delle rette.

Risposta: $y = -x^2 - 2x$, $y - 3 = (2 \pm 2\sqrt{3})(x + 2)$.

8. Risolvere la disequazione
$$|x^2-4|+4x<1\,, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Risposta: $x\in]-5,2-\sqrt{7}[$.

9. Nel triangolo ABC si ha $\overline{AB}=9\,\text{cm}$, $\overline{AC}=12\,\text{cm}$ e l'angolo $\widehat{B}$ è doppio dell'angolo $\widehat{C}$. Calcolare $\cos\widehat{C}$ e $\overline{BC}$.

Risposta: $\cos\widehat{C}=\dfrac{2}{3}$, $\overline{BC}=7$.

10. Ridurre ai minimi termini la funzione razionale
$$f(x)=\frac{x^3+2x^2+3x+6}{x^4-x^2-12}\,, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Risposta: $\dfrac{1}{x-2}$.

1.26 Prova scritta del 22/05/09

1. Sia γ la circonferenza di centro C e raggio $r>0$. Da un punto esterno O si traccino la retta secante OC, che interseca γ in A e B, la retta tangente OD (una delle due) tangente a γ in D. Se la distanza $d=\overline{OC}$ è pari al diametro $2r$, calcolare l'area e il perimetro del triangolo ABD.

Risposta: perimetro$=(3+\sqrt{3})r$; area$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,r^2$.

2. Trovare il massimo comun divisore tra i due polinomi
$$P(x)=2x^3+x^2-7x-6 \quad \text{e} \quad Q(x)=2x^3+3x^2-8x-12, \quad x\in\mathbb{R}$$

Risposta: $2x^2-x-6$.

3. Dato il fascio di rette di equazione $x+(k+1)y-1-3k=0$, $k\in\mathbb{R}$, determinare

a) l'equazione della retta del fascio parallela alla retta di equazione $2x-3y+2=0$,

b) le rette del fascio che distano 2 dall'origine $O=(0,0)$,

c) i valori di k ai quali corrispondono le rette del fascio con coefficiente angolare $m\in[1,2]$.

Risposta: *a)* $2x-3y+13=0$, *b)* $x+2=0$, $5x+12y-26=0$, *c)* $k\in\left[-2,-\dfrac{3}{2}\right]$.

4. Risolvere l'equazione irrazionale
$$\left(\sqrt{x-\sqrt{3}}+\sqrt{x+\sqrt{3}}\right)^2=4$$

Risposta: $x=\dfrac{7}{4}$.

5. Di un triangolo ABC si sa che $\overline{AB} = 6$, $\cos\beta = 3/5$ e $\cos\gamma = 4/5$, essendo α, β, γ gli angoli ai vertici A, B, C rispettivamente. Dopo aver dimostrato che il triangolo ABC è rettangolo, si calcolino le lunghezze dei lati AC e BC.

Risposta: $\overline{BC} = 10$, $\overline{AC} = 8$.

6. Risolvere l'equazione

$$\sin x = \cos 2x, \quad -\pi \le x \le \pi.$$

Risposta: $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.

7. Scrivere le equazioni delle parabole passanti per i punti $A = (0,0)$ e $B = (4,0)$ e tangenti alla retta di equazione $y = 2x - 9$.

Risposta: $y = x^2 - 4x$; $y = \frac{1}{4}x^2 - x$.

8. Risolvere la disequazione

$$2^{4^x} < 4^{2^x} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x \in]-\infty, 1[$.

9. Risolvere, nel suo dominio naturale, l'equazione in $\mathbb{R}$

$$\ln x + \ln(x+e) = \ln(2e^2).$$

Risposta: $x = e$.

10. Risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$

$$|3x - 2| = 5$$

e la disequazione

$$|3x - 2| \le 5$$

Risposta: $x \in \left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$; $x \in \left[-1, \frac{7}{3}\right]$.

11. Dopo aver risolto la disequazione

$$|\sin x| < \frac{1}{2}, \quad x \in [0, 2\pi],$$

dedurre le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} |\sin x| < \dfrac{1}{2} \\ |\operatorname{tg} x| > 0 \end{cases}.$$

Risposta: $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]$; escludi i punti in cui la tangente si annulla, ...

12. Semplificare l'espressione

$$(2-\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}\ \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}$$

e verificare che coincide con un numero intero.

Risposta: 1

1.27 Prova scritta del 08/06/09

1. Dati i punti $A(-1,0)$, $B(1,0)$ e $P(t,1)$, che al variare di $t \in \mathbb{R}$ percorre la retta $y=1$, scrivere l'equazione del luogo geometrico descritto dall'ortocentro (punto di incontro delle altezze) del triangolo ABP e disegnarlo.

Risposta: $y=-x^2+1$.

2. Determinare i valori h, $k \in \mathbb{R}$ tali che il polinomio

$$P(x)=x^4+hx^3-4x^2-2x+k\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

sia divisibile per x^2-1; trovare il polinomio quoziente e scomporlo in fattori.

Risposta: $h=2 \wedge k=3$; $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$.

3. Due cerchi $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ di raggi R e r, con $R>r>0$, hanno i centri A e B a distanza $d=R+r$. Si consideri la retta tangente a entrambi nei punti distinti $C \in \mathcal{C}_1$ e $D \in \mathcal{C}_2$. Calcolare l'area del quadrilatero $ABDC$.

Risposta: $(R+r)\sqrt{Rr}$.

4. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$

$$x-\sqrt{x^2-1} \le |x-1|\,.$$

Risposta: $x \in]-\infty,-1] \cup [\sqrt{2},+\infty[$.

5. In un triangolo ABC si ha $\overline{AC}=a$, $\overline{BC}=2a$, $A\widehat{C}B=2\pi/3$. Condurre da C la perpendicolare al lato CB fino a incontrare in M il lato AB e calcolare le lunghezze di AM, BM e CM.

Risposta: $\frac{1}{5}a\sqrt{7}$, $\frac{4}{5}a\sqrt{7}$, $\frac{2}{5}a\sqrt{3}$.

6. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il sistema

$$\begin{cases} 2a^2+5\cos 2x-12a\cos x+5=0 \\ \operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

ammette soluzioni $x \in [0,2\pi]$?

Risposta: $a \in \left\{\frac{11}{5}\,,-\frac{1}{5}\right\}$.

7. Sia $\mathcal{P}$ la parabola col vertice in $V(2,-1)$ e passante per il punto $A(1,0)$. Scrivere l'equazione della retta normale a $\mathcal{P}$ per il punto di ascissa 1 e le coordinate del secondo punto B in cui tale retta incontra la parabola.

Risposta: $y = \dfrac{1}{2}(x-1)$; $\left(\dfrac{7}{2}\,, \dfrac{5}{4}\right)$.

8. Risolvere la disequazione

$$\frac{7x-4}{|2x-8|} > 1\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x \in \left]\dfrac{4}{3}\,, 4\right[\,\cup\,]4\,, +\infty[$.

9. Le diagonali delle facce di un parallelepipedo rettangolo hanno lunghezze a, b e c. Quanto è lunga la diagonale principale?

Risposta: $\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2}}$.

10. Risolvere la disequazione

$$\frac{\cos 2x - \sin x}{\sqrt{2\cos x - 1}} \leq 0\,, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Risposta: $x \in \left[\dfrac{\pi}{6}\,, \dfrac{\pi}{3}\right[$.

1.28 Prova scritta del 20/07/09

1. Trovare il centro e il raggio della circonferenza passante per i punti $A = (0,1)$, $B = (2,-1)$ e $C = (2+\sqrt{3}, 0)$ e scriverne l'equazione.

Risposta: $(2,1)$; 2; $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$.

2. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$

$$x^2 - x \geq \sqrt{2x^3 - 2x^2}$$

Risposta: $x \in \{0,1\} \cup [3, +\infty[$.

3. Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$(a^2+a)x^2 + (2a^2-5a)y^2 - 4(3a-4)x - 12(a+1)y + \frac{56}{3} = 0$$

a) rappresenta una circonferenza di cui si chiede il raggio,

b) rappresenta una retta,

c) rappresenta una parabola con asse verticale di cui si chiedono le coordinate del vertice.

Risposta: *a)* $a = 6$, $r = 1$; *b)* $a = 0$; *c)* $a = \frac{5}{2}$, $\left(\frac{4}{5}, \frac{14}{45}\right)$.

4. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) > \cos 2x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Risposta: $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

5. Sia $ABCD$ un quadrilatero convesso rettangolo in B con $\overline{AB} = 1$. La sua diagonale AC è perpendicolare al alto CD ed è bisettrice dell'angolo $B\hat{A}D = 2\alpha$. In funzione di α calcolare $\overline{AD}$, $\overline{BD}$ e l'area del quadrilatero.

Risposta: $\overline{AD} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$, $\overline{BD} = \dfrac{\sqrt{1 + 2\cos^2\alpha - 3\cos^4\alpha}}{\cos\alpha}$, area$= \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha[2 + \operatorname{tg}^2\alpha]$.

6. Risolvere il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{5}{6} \\ x^2y + xy^2 = 30 \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $(3, 2)$, $(1, -6)$, $(2, 3)$, $(-6, 1)$.

7. Si consideri un cerchio di diametro $\overline{AB} = 2r$, la retta tangente t in A, e le due tangenti u e v condotte da un punto P del prolungamento di AB dalla parte di B. Sapendo che l'angolo formato dalle due rette u e v è di $2\pi/3$, calcolare il perimetro del triangolo formato dalle tre rette.

Risposta: $(4\sqrt{3} + 2)r$.

8. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$

$$\frac{(x-2)(x^2 + 6x + 9)}{2x^4 - 9x^2 - 5} < 0.$$

Risposta: $x \in]-\infty, -3[\cup] - 3, -\sqrt{5}[\cup]2, \sqrt{5}[$.

9. Scrivere l'equazione del luogo geometrico dei punti equidistanti da $A = (0, 0)$ e $B = (4, 2)$ e trovarne l'intersezione C con l'asse y. Calcolare l'area del triangolo ABC.

10. Risolvere l'equazione in $\mathbb{R}$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sqrt{3}\cos(-x) + \frac{1}{2} = 0.$$

Risposta: $x \in \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi\right\}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$.

11. Dopo aver specificato il dominio in $\mathbb{R}$, risolvere l'equazione

$$\log(x+1) + \log(x) = 2\log(1-x).$$

Perché la soluzione non dipende dalla base dei logaritmi?

Risposta: Dominio: $]0,1[$, $x = \dfrac{1}{3}$; perchè le proprietà dei logaritmi non dipendono dalla base...

12. Risolvere l'equazione rispetto a $x \in \mathbb{R}$

$$a^{1+\sqrt{x}} + a^{3-\sqrt{x}} = 2a^2$$

essendo $a > 0$ un numero reale fissato.

Risposta: $x = 1$.

1.29 Prova scritta del 02/10/09

1. Un trapezio rettangolo è circoscritto a una circonferenza di raggio $12k$. Descrivere con un disegno la situazione geometrica e determinare l'area del trapezio sapendo che il perimetro è $100k$.

Risposta: Area= $600k^2$.

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{\sin x}{4\cos^2 x - 1} \leq 0\,, \quad 0 \leq x \leq 2\pi\,.$$

Risposta: $\{0\} \cup \left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left[\pi, \dfrac{4\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right].$

3. Sia $\mathcal{C}$ una circonferenza di raggio 1 e AB una corda di lunghezza 1. Se C è il punto di $\mathcal{C}$ a distanza $\sqrt{2}$ da B tale che $A\hat{B}C$ sia ottuso, calcolare l'area del triangolo ABC.

Risposta: $\dfrac{1}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

4. Dato il polinomio

$$P(x) = x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a\,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ una radice è $x = 1$, per quali valori di a tale radice è doppia e nei due casi scomporre il polinomio in fattori.

Risposta: $\forall a \in \mathbb{R}$; $\quad (x-1)(x-a)(x-2)$; $\quad a = 1$; $\quad (x-1)^2(x-2)$.

5. Determinare $k \in \mathbb{R}$ affinché la parabola di equazione $y = (k+4)x^2 - (k+4)x + k - 2$ abbia la concavità verso l'alto e sia tangente alla retta passante per i punti $A = (0, 2)$ e $B = (1, -6)$, disegnarla. Stabilire infine per quali valori di k si ottengono parabole con intersezione non vuota con l'asse x.

Risposta: $k = 4$; $k \in]-4, 4]$.

6. Trovare $x, y \in \mathbb{R}$ tali che la somma dei loro quadrati sia 10 e il prodotto dei loro cubi sia -27.

Risposta: $(3, -1)$; $(-1, 3)$; $(1, -3)$; $(-3, 1)$.

7. Dato il fascio $\mathcal{P}$ di parabole

$$y = x^2 - 2tx + (t+1)^2\,,$$

trovare il luogo geometrico $\mathcal{V}$ descritto dai vertici. Indicato con A il punto d'incontro fra $\mathcal{V}$ e l'asse y, trovare la parabola il cui vertice V, situato nel primo quadrante, forma con A e con l'origine O un triangolo isoscele. Calcolare l'area del triangolo OAV.

Risposta: $y = 2x + 1$; $t = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; Area$= \dfrac{1}{2\sqrt{5}}$.

8. Risolvere la disequazione

$$|3 + 2x| - 1 < 4x\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $]1, +\infty[$.

9. In un triangolo isoscele l'angolo al vertice è α. Determinare il rapporto dei raggi delle circonferenze inscritta e circoscritta.

Risposta: Posto $\beta = \dfrac{\alpha}{2}$, si ha $\dfrac{r}{R} = 2(\sin\beta - \sin^2\beta)$.

10. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{x^2 - 1} - 5 > x\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $\left]-\infty, -\dfrac{13}{5}\right[$.

1.30 Prova scritta del 25/01/10

1. Un trapezio rettangolo $ABCD$ ha la base maggiore $\overline{AB} = 3a$, la base minore $\overline{CD} = 2a$ e il lato obliquo $\overline{BC} = 2a$. Determinare l'ampiezza dell'angolo $\beta = A\hat{B}C$. Delle due semicirconferenze di diametro BC, considerare quella rivolta verso l'interno del trapezio, scegliere su di essa un punto P ed esprimere $\overline{CP}$ in funzione dell'angolo $\vartheta = P\hat{C}B$. Determinare infine il perimetro del triangolo PCD.

Risposta: $\beta = \dfrac{\pi}{3}$; $\overline{CP} = 2a\cos\vartheta$;

$$\text{perimetro} = 2a + 2a\cos\vartheta + 2a\sqrt{1 + 2\cos^2\vartheta - \sqrt{3}\sin\vartheta\cos\vartheta}.$$

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{|4-x^2|-3x}{\sqrt{x^2-3x}}>0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Risposta: $x\in]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$.

3. Tra le parabole di equazioni $4y=4kx-x^2,\ k\in\mathbb{R}$, determinare quelle tangenti alla retta t di equazione $y=x+4$. Di queste considerare quella il cui vertice V ha ascissa negativa e indicare con T e Q rispettivamente il punto di contatto con la retta t e l'intersezione di questa retta con l'asse y. Calcolare l'area del triangolo TVQ.

Risposta: $y=-\frac{1}{4}x^2-x$, $y=-\frac{1}{4}x^2+3x$; $T(-4,0)$, $Q(0,4)$, $V(-2,1)$; area $=2$.

4. Determinare le condizioni su $a\in\mathbb{R}$ affinché il polinomio

$$P(x)=x^4+(a-1)x^2-a$$

abbia quattro radici reali e distinte e calcolare le radici.

Risposta: $a\in]-\infty,-1[\cup]-1,0[$; $x\in\{-1,1,-\sqrt{-a},\sqrt{-a}$.

5. Fra tutte le rette passanti per il punto $A=(1,2)$ determinare quella o quelle che nel primo quadrante formano con gli assi coordinati un triangolo di area pari a 4.

Risposta: $2x+y-4=0$.

6. Risolvere la disequazione

$$x^4+x^2-18|x|+16\geq 0, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Risposta: $x\in]-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty[$.

7. Scrivere l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A=(2,-1)$ e $B=(0,3)$. Tra le circonferenze passanti per A e B, determinare quella tangente alla retta r passante per il punto $C(0,4)$ e parallela ad AB.

Risposta: $x-2y+1=0$; $\left(x+\frac{19}{5}\right)^2+\left(y+\frac{7}{5}\right)^2=\frac{169}{5}$.

8. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{\frac{9-x}{x+1}}<x-3, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Risposta: $x\in]4,9]$.

9. La base AB di un triangolo isoscele misura $8a$ e $\cos\alpha=1/4$, essendo $\alpha=C\hat{A}B$. Calcolare il perimetro e l'area del triangolo e la misura del raggio del cerchio inscritto.

Risposta: Perimetro $=40a$; area $=16a^2\sqrt{15}$.

10. Risolvere la disequazione

$$2\sqrt{3}\sin^2 x + \cos x \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x \in \left[\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi\,,\ \dfrac{7\pi}{6} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

1.31 Prova scritta del 22/04/10

1. Dato il fascio di rette di equazione

$$(k-1)x + (2k+3)y - 2 = 0\,,$$

trovare per quale valore del parametro $k \in \mathbb{R}$ la retta corrispondente verifica le seguenti condizioni

a) è parallela alla retta di equazione $3x + y - 1 = 0$,

b) è perpendicolare alla retta di equazione $3x - 4y + 1 = 0$,

c) passa per il punto $P(1, 2)$.

Risposta: *a)* $k = -2$, *b)* $k = -3$, *c)* $k = -\dfrac{3}{5}$.

2. È data la conica di equazione

$$x^2 + ky^2 - k^2 y = x\,.$$

a) Stabilire al variare di $k \in \mathbb{R}$ il tipo di conica;

b) nel caso di una circonferenza trovarne centro e raggio;

c) disegnare il luogo geometrico relativo al caso $k = 0$.

Risposta:

a) Per $k \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[$: iperbole; per $k = -1$ coppia di rette incidenti; per $k = 0$ coppia di rette parallele; per $k \in]0, +\infty[$ ellisse, in particolare circonferenza per $k = 1$.

b) Per $k = 1$ circonferenza di centro $C\left(\dfrac{1}{2}\,,\ \dfrac{1}{2}\right)$ e raggio $r = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

c) Coppia di rette parallele $x = 0$ e $x = 4$.

3. Risolvere l'equazione

$$\sqrt{4-x} + \sqrt{x+2} = \sqrt{x}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: Nessuna soluzione.

4. Risolvere la disequazione in $\mathbb{R}$

$$\operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x > 0\,, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\,.$$

Risposta: $x \in \left]-\dfrac{\pi}{2}\,, 0\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{4}\,,\ \dfrac{\pi}{2}\right[$.

5. Risolvere la disequazione
$$|x^2 - 2x| < 3\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x \in]1, 3[$.

6. Per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il polinomio
$$P(x) = x^3 + x^2 + 2ax$$
è divisibile per $x + a$?

Risposta: $a \in \{-1, 0\}$.

7. Risolvere il sistema di equazioni
$$\begin{cases} (x+y)(x^2+y^2) = 0 \\ x^4 + y^4 + x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $(x, y) \in \{(-1, 1), (1, -1)\}$.

8. Una circonferenza γ_r di raggio $r > 0$ è tangente internamente ad un'altra circonferenza γ_R di raggio $R > 2r$ e di centro O. Calcolare l'area e il perimetro del triangolo OAB formato dalle semirette uscenti da O e tangenti γ_r nei punti A e B.

Risposta: Area $= \dfrac{Rr(R-2r)\sqrt{R^2 - 2Rr}}{(R-r)^2}$; perimetro $= \dfrac{2R\sqrt{R^2 - 2Rr}}{R - r}$.

9. Scrivere l'equazione del luogo geometrico dei punti $P(x, y)$ la cui distanza dal punto $A(1, 0)$ è pari alla metà della distanza dalla retta $x = 4$. Riconoscerlo e disegnarlo.

Risposta: $3x^2 + 4y^2 = 12$; Si tratta di un'ellisse di centro l'origine e semiassi 2 e $\sqrt{3}$.

10. Risolvere la disequazione
$$\frac{\cos x - 1}{\sin x} \leq \sqrt{3}\,, \quad -\pi < x < \pi.$$

Risposta: $x \in]-\pi, 0[\cup \left[\dfrac{\pi}{6}, \pi\right[$.

11. Dopo averne specificato il dominio in $\mathbb{R}$, risolvere l'equazione
$$12 \log_x 2 + \log_2 x = 8\,.$$

Risposta: Dominio: $x \in [0, 1[\cup]1, +\infty[$; $x \in \{4, 64\}$.

12. Un trapezio rettangolo ha la base maggiore di 12 cm e l'altezza di 5 cm. Determinare la base minore e il lato obliquo in modo che l'area del triangolo che essi formano con la diagonale maggiore del trapezio sia di 10 cm^2.

Risposta: Base minore: 4 cm; lato obliquo: $\sqrt{89}$.

1.32 Prova scritta del 14/05/10

1. Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{2-x}} \geq -1\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x \in [1, 2[$.

2. Tra le rette del fascio

$$4x + 3y + k = 0$$

individuare quelle che, intersecando gli assi cartesiani in A e B, formano triangoli AOB di area 24.

Risposta: $k \in \{-24, 24\}$.

3. Risolvere la disequazione

$$\cos 2x + 3\sin x \geq 2\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. Dato il fascio di circonferenze

$$x^2 + y^2 + kx - 1 = 0\,,$$

trovare $k \in \mathbb{R}$ affinché

a) il raggio sia $\sqrt{5}$;

b) il centro appartenga alla retta $y = 2x - 1$;

c) la circonferenza corrispondente sia tangente alla retta $y = x - \sqrt{3}$.

Risposta: *a)* $k = \pm 4$; *b)* $k = -1$; *c)* $k = 2(\sqrt{3} \pm 2)$.

5. Risolvere l'equazione

$$\log_2(3 \cdot 2^x - \sqrt{2} \cdot 2^{2x}) = \frac{1}{2}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x = \pm\frac{1}{2}$.

6. Trovare le coppie di numeri reali tali che la somma è 6 e la somma dei cubi è 72.

Risposta: $(4, 2), (2, 4)$.

7. Dato il polinomio

$$P(x) = x^3 - ax^2 - x + a\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

dipendente dal parametro $a \in \mathbb{R}$,

a) trovare a per cui $P(x)$ ha radici doppie;

b) per $a = 2$ trovare il resto della divisione di $P(x)$ per $x + 3$;

c) stabilire per quali valori di a il polinomio è divisibile per $x + 4$.

Risposta: $a)$ $a = \pm 1$; $b)$ resto: -40; $c)$ $a = -4$.

8. Siano AB una corda di una circonferenza γ di centro O e raggio $r > 0$, CD il diametro ortogonale ad AB, con C dalla parte di AB, e si ponga $2\alpha = A\hat{O}B$. Determinare $\cos\alpha$ in modo che il rapporto tra l'area del triangolo OAB e quella del triangolo ABC sia $k > 0$. Calcolare in funzione di k il perimetro di ABC e l'area di ABD.

Risposta: $\cos\alpha = \dfrac{k}{1+k}$; perimetro di $ABC = \dfrac{4r}{\sqrt{2(k+1)}} + 2r\sqrt{\dfrac{1+2k}{(1+k)^2}}$;

area di $ABD = r^2 \dfrac{\sqrt{1+2k}(1+2k)}{(1+k)^2}$.

9. Risolvere la disequazione

$$|x| - |x-1| < 1\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x \in]-\infty, 1[$.

10. Si considerino la parabola $x = y^2$ e una delle due rette tangenti ad essa passante per $A(-4, 0)$. Se B è il punto di tangenza, calcolare l'area e il perimetro del triangolo OAB.

Risposta: Area = 4; perimetro = $2(2 + \sqrt{5} + \sqrt{17})$.

11. Risolvere la disequazione

$$2\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x \leq 1\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x \in \left]k\pi, \dfrac{\pi}{4} + k\pi\right[\,,\ k \in \mathbb{Z}$.

12. Il trapezio isoscele $ABCD$ è circoscritto ad una semicirconferenza di centro O. Siano H il piede della perpendicolare condotta da C alla base maggiore AB e K il punto di tangenza della semicirconferenza con il lato BC. Determinare il perimetro e l'area del trapezio $ABCD$ sapendo che $\overline{OK} = 8\,\text{cm}$ e $\overline{AB} = 20\,\text{cm}$.

Risposta: Perimetro = 48 cm, area = $112\,\text{cm}^2$.

1.33 Prova scritta del 14/06/10

1. In un trapezio scaleno $ABCD$ le basi misurano $\overline{AB} = 21 + 5\sqrt{3}$ e $\overline{CD} = 9$. Sapendo che l'angolo in B ha ampiezza $\dfrac{\pi}{3}$ e che $\cos\hat{D} = -\dfrac{5}{13}$, calcolare la lunghezza dei lati obliqui.

Risposta: $13\sqrt{3}$, 24.

2. Risolvere la disequazione

$$\frac{x+1}{x^2-1}-\frac{3-x}{x^3-1}\geq\frac{2x+2}{x^2+x+1}\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Risposta: $x\in]-\infty,-1[\cup]-1,0]\cup]1,2]$.

3. Si considerino le parabole di equazioni $y=x^2-5x+4$, $y=-x^2+kx+k+1$, $k\in\mathbb{R}$, e la retta r di equazione $y=2$. Calcolare i valori di k per i quali la retta r stacca sulle parabole corde uguali.

Risposta: $k\in\{-7,3\}$.

4. Al variare di $a\in\mathbb{R}$, determinare le corrispondenti soluzioni dell'equazione

$$\frac{x^2+3a-15+a^2}{(x+a)(x-5)}-\frac{3}{x+a}=-\frac{a}{5-x}\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Risposta: $a\in\{0,5\}$, $x=3$; $a=-3$, $x=-3$; $a\notin\{-3,0,5\}$, $x\in\{a,3\}$.

5. Si considerino, nell'ordine, quattro punti allineati O, A, B, e C tali che $\overline{OA}=a$, $\overline{OB}=2a$, $\overline{OC}=3a$. Sia P uno dei due punti della retta passante per O e perpendicolare ad OC tale che $\overline{OP}=a$. Posto $\alpha=P\hat{A}O$, $\beta=P\hat{B}O$ e $\gamma=P\hat{C}O$, dimostrare che $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

Risposta: Si ha, facilmente, $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{1}{3}$. Da qui $\operatorname{tg}(\beta+\gamma)=1$, e quindi $\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$.

6. Risolvere la disequazione

$$|x^2-x|\leq 2|x|-3\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Risposta: Nessuna soluzione.

7. Dato il triangolo di vertici $A(0,0)$, $B(6,0)$ e $C(-2,-4)$, scrivere l'equazione della circonferenza circoscritta e determinarne il centro e il raggio. Scrivere le equazioni delle rette tangenti alla circonferenza passanti per il punto $T(9,1)$.

Risposta: $(x-3)^2+(y+4)^2=25$; $y-1=0$, $60x-11y-529=0$.

8. Risolvere la disequazione

$$\frac{\sqrt{x-\sqrt{x^2-2x}}}{x^2-5}\leq 0\,,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Risposta: $x\in\{0\}\cup[2,\sqrt{5}[$.

9. Del triangolo ABC è noto che $\cos B\hat{A}C < 0$ e che $\overline{AC} = 26a$. Determinare il perimetro del triangolo sapendo che $8a$ è la lunghezza dell'altezza BH relativa al lato AC e $\overline{HA} = 6a$.

Risposta: Perimetro: $4a(9 + 2\sqrt{17})$.

10. Risolvere la disequazione

$$\sin^2 x - \cos^2 x \leq \cos x\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x \in \{\pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\} \cup \left(\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi\,,\ \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]\right)$

1.34 Prova scritta del 19/07/10

1. Data la semicirconferenza di centro O e diametro AB di lunghezza 2, siano R ed S i punti medi dei raggi OA e OB rispettivamente. Sia inoltre MN una corda parallela ad AB (M più vicino a B). Determinare la lunghezza x dell'altezza del trapezio $MNRS$ in modo che il lato obliquo abbia lunghezza $\frac{3}{2\sqrt{5}}$. Determinare infine il perimetro e l'area del trapezio.

Risposta: $x = \frac{3}{5}$; perimetro $MNRS = \frac{13 + 3\sqrt{5}}{5}$; area $MNRS = \frac{39}{50}$.

2. Risolvere il sistema di equazioni

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 2.4 \end{cases} \qquad x, y \in \mathbb{R}\,.$$

Risposta: $(x, y) \in \{(3, 4), (4, 3)\}$.

3. Data la parabola di equazione $y = 1 - x^2$, scrivere l'equazione della parabola ad essa tangente nel punto $\left(\frac{1}{2}\,,\ \frac{3}{4}\right)$ e col vertice sull'asse x.

Risposta: $y = \frac{1}{3}(x - 2)^2$.

4. Risolvere la disequazione

$$\frac{4 - |3x - 2|}{7x + 4 + \sqrt{x - 1}} \leq 0\,.$$

Risposta: $x \in [2, +\infty[$.

5. Sono dati nel piano il punto $P(1, 3)$ e le rette r ed s di equazioni $x + y = 2$ e $3x + y = 6$. Determinare le coordinate del punto A proiezione ortogonale di P su r, il punto B di intersezione delle due rette e i vertici dei quadrati che hanno un lato coincidente col segmento AB.

Risposta: $A(0,2)$, $B(2,0)$, $C(2,4)$, $D(4,2)$, $C'(-2,0)$, $D'(0,-2)$.

6. Scrivere tutte le condizioni di esistenza e semplificare la seguente espressione

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{a}}}{\sqrt{a-\frac{1}{a}}} \cdot \left(\frac{1-\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}}{1+\frac{a}{\sqrt{a^2-1}}} + \frac{a+\sqrt{a^2-1}}{a-\sqrt{a^2-1}} \right), \quad a \in \mathbb{R}\,.$$

Risposta: $a > 1$; $4a$.

7. In un triangolo di lati a, b, c, opposti agli angoli α, β, γ, vale la relazione

$$b = 4c\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\,.$$

Dopo aver dimostrato che il secondo membro si può scrivere nella forma $c(1+2\cos\alpha)$, trovare a, sapendo che $b=5$ e $c=4$.

Risposta: $a = 6$.

8. Stabilire per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ il polinomio

$$P(x) = x^4 + x^3 - (a+2)x^2 - ax + 2a\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

ammette radici multiple e per quali valori di a ammette solo due radici reali.

Risposta: Per $a = 0$, 0 è una radice doppia, per $a = 4$, -2 è radice doppia, per $a = 1$, 1 è radice doppia. Per $a < 0$ le uniche radici reali sono -2 e 1.

9. Fissato nel piano un punto O, siano OP e OQ due segmenti di uguale lunghezza a, $PRQS$ un rombo di lato $b < a$, e H il punto di incontro delle diagonali del rombo. Posto $x = \overline{PH}$, calcolare $\overline{OR}\cdot\overline{OS}$ e osservare che questo prodotto non dipende da x, ma solo da a e b.

Risposta: $\overline{OR}\cdot\overline{OS} = a^2 - b^2$.

10. Risolvere l'equazione

$$8\sin^2 x + 8\cos^4 x - 13\cos 2x = 0\,, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Risposta: $x \in \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

1.35 Prova scritta del 01/10/10

1. Determinare l'equazione della circonferenza avente il centro sulla retta r di equazione $y = 1$ e passante per i punti $A(3+\sqrt{3}, 0)$ e $B(1, 1)$. Calcolare inoltre i vertici del triangolo rettangolo isoscele circoscritto alla circonferenza e avente la base sulla retta $x = 5$ e l'altezza sulla retta $y = 1$.

Risposta: $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$; $(3-2\sqrt{2}, 1)$, $(5, -1-2\sqrt{2})$, $(5, 3+2\sqrt{2})$.

2. Dati i due polinomi a coefficienti reali dipendenti da un parametro

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & (k^3+k^2-5k+3)x^3 + (k-1)x^2 + 2x - k \\ g(x) & = & (k^2+2k-3)x^3 - (2k+1)x^2 + kx - 1 \end{array}, \quad x \in \mathbb{R},$$

stabilire per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ il grado di f è minore del grado di g.

Risposta: $k = 1$.

3. In un triangolo ABC l'angolo α con vertice in A è tale che $\cos\alpha = {}^{11}/_{16}$, l'angolo β con vertice in B è tale che $\cos\beta = {}^{7}/_{8}$, infine $\overline{AB} = 4$. Calcolare il perimetro del triangolo. Determinare inoltre le lunghezze dei lati del rettangolo $FGHK$, con K in AC e H in BC, la cui base FG, contenuta in AB, è doppia dell'altezza FK.

Risposta: Perimetro$=$ 9; $\overline{FK} = \dfrac{6\sqrt{15}}{16+3\sqrt{15}}$.

4. Risolvere l'equazione algebrica

$$\frac{1}{1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}} - \frac{x+2}{x+1} = \frac{2x+1}{1-x-2x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x = -2$.

5. Dato il triangolo isoscele ABC con base $\overline{AB} = 6a\sqrt{3}$ e l'angolo al vertice $A\hat{C}B = {}^{2\pi}/_{3}$, si divida il lato BC in tre parti uguali mediante i punti M e N. Si determinino le lunghezze dei segmenti AM e AN.

Risposta: $\overline{AM} = a\sqrt{76}$, $\overline{AN} = a\sqrt{52}$.

6. Risolvere la disequazione

$$|x^2+2x-3| \leq 2x+6, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $\{-3\} \cup [-1, 3]$.

7. Assegnate la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2+y^2-2y-1 = 0$, la parabola $\mathcal{P}$ di equazione $4x+y^2 = 0$ e la retta r di equazione $x-y = 0$, trovare la retta t parallela ad

r e tangente a $\mathcal{C}$ e a $\mathcal{P}$. Inoltre, detti A e B i rispettivi punti di tangenza, determinare le coordinate dei vertici dei quadrati aventi un lato coincidente col segmento AB.

Risposta: $t\colon x - y - 1 = 0$; $\{(1,0),\ (-1,-2),\ (-3,0),\ (-1,2)\}$; $\{(1,0),\ (-1,-2),\ (1,-4),\ (3,-2)\}$.

8. Risolvere la disequazione

$$\frac{2\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}+1 \leq \sqrt{x+1}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $\{-1\} \cup [3,+\infty[$.

9. Esternamente al triangolo equilatero ABC di lato $2r$, costruire la semicirconferenza con diametro BC. Tracciare su di essa la corda $PQ = {}^{BC}/_{2}$ parallela a BC e calcolare il perimetro del triangolo PAQ e il $\cos(P\hat{A}Q)$.

Risposta: Perimetro $PAQ\colon 1 + 2\sqrt{7}$; $\cos(P\hat{A}Q) = \dfrac{13}{14}$.

10. Risolvere la disequazione

$$\frac{2\cos^2 x - \sin 2x}{1 - \mathrm{tg}^2\, x} \geq 0\,, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Risposta: $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

1.36 Prova scritta del 24/01/11

1. Sulla semicirconferenza di diametro $AB = 2r$ si considerino i punti C e D tali che $AC = CD = 2DB$. Calcolare il perimetro del quadrilatero $ABDC$.

Risposta: $2p = \dfrac{r}{8}\left(11 + 5\sqrt{33}\right)$.

2. Si consideri il polinomio

$$P(x) = x^3 - hx^2 - x + h,\ h \in \mathbb{R}\,.$$

a) Dire per quali valori di h, $x = h$ è radice di $P(x)$;

b) dire quali sono i valori di h per i quali $x = h$ è radice multipla di $P(x)$.

Risposta: a): per ogni h; b) : $h = \pm 1$.

3. Dati il punto $A = (1, 2)$ e la retta r di equazione $3x - y - 6 = 0$, determinare la proiezione ortogonale H di A su r e i punti B di r tali che l'area del triangolo AHB sia 2.

Risposta: $H = ({}^5/_2\,,\ {}^3/_2)$; $\quad B = ({}^{33}/_{10}\,,\ {}^{39}/_{10})\,, \quad B' = ({}^{17}/_{10}\,,\ -{}^{9}/_{10})$.

4. Risolvere la disequazione irrazionale algebrica

$$\sqrt{|x-1|+1} \geq \frac{x}{2}\,.$$

Risposta: $]-\infty, 4]$.

5. Si consideri il trapezio isoscele $ABCD$ in cui $\overline{AB} = 5$ è la base maggiore, $\overline{BC} = 3$ è un lato obliquo e $\overline{AC} = 4$ è la diagonale. Condotte dai vertici A e C le bisettrici degli angoli $C\hat{A}B$ e $A\hat{C}D$ rispettivamente, e detti M ed N i punti di incontro di queste rette con BC e AD, dimostrare che le due bisettrici sono parallele e calcolare l'area del trapezio $AMCN$.

Risposta: Area trapezio: $(176/45)$.

6. Data l'equazione

$$x^2 - kx + k - 4 = 0\,, \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

determinare i valori di $k \in \mathbb{R}$ tali che la somma dei quadrati delle soluzioni sia 11.

Risposta: $k \in \{-1, 3\}$.

7. Sono date la circonferenza $\mathcal{C}$ di equazione $x^2+y^2 = 4$ e la retta r di equazione $x+y = 0$. Scrivere le equazioni delle rette parallele ad r e tangenti a $\mathcal{C}$. Scrivere inoltre l'equazione della circonferenza contenuta nel primo quadrante e tangente internamente a $\mathcal{C}$.

Risposta: $x+y = 2\sqrt{2}\,,\ x+y = -2\sqrt{2}\,;\quad \big(x-2\sqrt{2}+2\big)^2+\big(y-2\sqrt{2}+2\big)^2 = (2\sqrt{2}-2)^2\,.$

8. Risolvere la disequazione

$$\frac{2\cos 2x + 2(\sqrt{3}+1)\sin x - 2 - \sqrt{3}}{3\sin^2 x - \cos^2 x} \geq 0\,, \quad x \in [-\pi, \pi]\,.$$

Risposta: $x \in \left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{6}, \pi\right]\,.$

9. Scrivere l'equazione della parabola $\mathcal{P}$ che ammette come fuoco il punto $F = (1, -3/4)$ e come direttrice la retta $y = -5/4$. Trovare poi la retta tangente a $\mathcal{P}$ e ortogonale alla retta $x - 2y + 2 = 0$.

Risposta: $y = x^2 - 2x;\quad y = -2x.$

10. Determinare i numeri $k \in \mathbb{R}$ tali che il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x+3} < 1 \\ x - k^2(x-1) - x^2 > 0 \end{cases}\,, \quad x \in \mathbb{R},$$

non abbia soluzioni.

Risposta: $-\sqrt{3} \leq k \leq \sqrt{3}\,.$

1.37 Prova scritta del 13/06/11

1. Sui lati AB, BC e DC di un quadrato di lato 10 si considerino rispettivamente i punti M, N e Q tali che $\overline{BN} = \overline{AM} + 3$ e $\overline{CQ} = \overline{AM} + 4$. Determinare $\overline{AM}$ in modo che l'area del quadrilatero $AMNQ$ sia 45.

Risposta: $\overline{AM} = 2$.

2. Risolvere l'equazione irrazionale algebrica

$$\sqrt{2x-1} + \sqrt{x} = 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x = 1$.

3. Scrivere le equazioni delle circonferenze tangenti alla retta di equazione $y = x - 1$ e passanti per i punti $A = (2, 0)$ e $B = (3, 0)$.

Risposta: $x^2 + y^2 - 5x + 7y + 6 = 0; \quad x^2 + y^2 - 5x - y + 6 = 0$.

4. Risolvere la disequazione

$$\left|x^2 - 1\right| \leq 5x^2 - 2x\,, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $x \in \left]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{7}}{6}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{7}}{6}, +\infty\right[$.

5. In un triangolo ABC si ha $\overline{AB} = 1 + 1/\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} A\hat{C}B = 2 + \sqrt{3}$ e $\overline{CH} = 1$, essendo CH l'altezza relativa ad AB. Calcolare il perimetro del triangolo. (Si consiglia di porre $x = \overline{AH}$, $y = \overline{HB}$, $A\hat{C}H = \alpha$ e $H\hat{C}B = \beta$).

Risposta: $2p = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

6. Ricavare $\operatorname{tg} x$ dal sistema

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = 7/5 \\ 2\sin^2 x + 3\cos^2 x + 5\sin x \cos x - 5\sin x = 3/25 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risposta: $\operatorname{tg} x = \dfrac{3}{4}$.

7. Scrivere l'equazione del luogo geometrico dei baricentri dei triangoli AOP, dove $A = (0, 4)$, $O = (0, 0)$ e P percorre la parabola di equazione $y = x^2$.

Risposta: $y = 3x^2 + \dfrac{4}{3}$.

8. Risolvere la disequazione

$$\frac{\cos 2x - \cos x}{\sin x} > 0, \quad x \in [0, 2\pi].$$

Risposta: $x \in \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right[$.

9. In un trapezio isoscele $ABCD$ la base maggiore AB ha lunghezza 5 e la diagonale BD ha lunghezza 4; inoltre BD e AD sono tra loro ortogonali. Sia M il punto della base minore CD tale che $\operatorname{tg}\alpha = 9/8$, essendo $\alpha = M\hat{A}B$. Calcolare l'area del trapezio $ABCM$.

Risposta: Area $= \dfrac{182}{25}$.

10. Determinare i numeri $k \in \mathbb{R}$ tali che le soluzioni x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$ dell'equazione

$$(k+1)x^2 - kx - 1 = 0$$

soddisfino la condizione

$$x_1 + x_2 + 2x_1x_2 = -\frac{1}{2}.$$

Risposta: $k = 1$.

1.38 Prova scritta del 05/09/11

1. Dato un triangolo equilatero ABC, sia $DEFG$ il quadrato con lato DE su AB e vertici F e G rispettivamente sui lati BC e AC. Inoltre siano L e l rispettivamente le misure dei lati del triangolo e del quadrato. Sapendo che $L - l = 2\sqrt{3}$, determinare la differenza delle misure dei perimetri del triangolo e del quadrato.

Risposta: $6\sqrt{3} - 3$.

2. Risolvere in $\mathbb{R}$ la seguente equazione

$$\frac{x}{\sqrt{x}+1} + \frac{\sqrt{x}}{2} = 1$$

Risposta: $x = 1$.

3. Sia data la circonferenza $x^2 + y^2 = 1$. Detto $V = (0, b)$, con $b > 1$, un punto sul semiasse superiore delle ordinate e ABV il triangolo isoscele, con vertice in V, circoscritto alla circonferenza, determinare b in modo che il triangolo abbia altezza doppia della base.

Risposta: $b = \sqrt{17}$.

4. Determinare per quali valori reali di a il polinomio $x^4 + x^3 - ax^2 + (a+1)x + 2$ è divisibile per il polinomio $x^2 + ax + 1$.

Risposta: $a \in \{-1, 3\}$.

5. In un triangolo ABC rettangolo in A, si ha che $\overline{AC} = \overline{AB}\sqrt{3}$ e che $\overline{BC} = a + \overline{AC}$, con $a > 0$. Determinare a in modo che la misura dell'altezza relativa all'ipotenusa BC sia uguale a
$$\frac{2}{2-\sqrt{3}}\,.$$

Risposta: $a = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$.

6. Risolvere la seguente disequazione
$$\frac{\cos x - \sin x}{1 + \operatorname{tg} x} \geq 0$$
nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Risposta: $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right] \cup \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right[\cup \left[\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

7. Sia $ABCD$ un trapezio rettangolo con base minore DC e lato obliquo CB. Sia inoltre M un punto interno al lato DA. Se l'angolo $A\hat{B}C = \pi/6$ e se $\overline{DC} = a$, $\overline{CB} = a\sqrt{3}$ e $\overline{MB} = a\sqrt{13/2}$, determinare $a > 0$ in modo che l'area del quadrilatero $MBCD$ sia $7\sqrt{3} - 5$.

Risposta: $a = 2\sqrt{2}$.

8. Risolvere in $\mathbb{R}$ il sistema di disequazioni
$$\begin{cases} (x-2)^3 < 0 \\ (x-2)(x+2) > 3x \end{cases}.$$

Risposta: $x < -1$.

9. Un segmento PQ di lunghezza $2l$ passa per il punto $A = (0, 2l/3)$ ed ha l'estremo P sull'asse x. Determinare i punti P e Q in modo che il triangolo OPQ sia isoscele sulla base PQ.

Risposta: $P = \left(\dfrac{2l}{\sqrt{3}}, 0\right), Q = \left(-\dfrac{l}{\sqrt{3}}, l\right)$; $\quad P = \left(-\dfrac{2l}{\sqrt{3}}, 0\right), Q = \left(\dfrac{l}{\sqrt{3}}, l\right)$.

10. Risolvere la seguente disequazione
$$|x^2 - 4| \leq 2x + 4\,.$$

Risposta: $x \in \{-2\} \cup [0, 4]$.

2 Esercizi proposti con soluzione breve

Esercizio 2.1. Per quali valori di s esiste ua coppia (a, b) di numeri reali tali che

$$a + b = s \quad \text{e} \quad ab = 16\ ?$$

Trova quei valori si s per cui i numeri a e b di cui sopra sono entrambi numeri interi negativi.

Risposta: $s \in]-\infty, -8] \cup [8, +\infty[$; $s \in \{-8, -10, -17\}$.

Esercizio 2.2. È noto che l'area della superficie laterale $\mathcal{S}$ di un cono retto Γ di raggio di base r e altezza h è $\pi r\sqrt{h^2 + r^2}$.

Qual è allora il rapporto tra h e r, se lo sviluppo di $\mathcal{S}$ mediante rotolamento di Γ su di un piano α risulta essere esattamente un semidisco circolare?

Risposta: $\dfrac{h}{r} = \sqrt{3}$.

Esercizio 2.3. ABC è un triangolo rettangolo in A. Se D è il punto di AC equidistante da B e C, e BE è la bisettrice dell'angolo $A\hat{B}D$, qual è la misura in radianti dell'angolo $E\hat{B}C$?

Risposta: $\dfrac{\pi}{4}$.

Esercizio 2.4. In un triangolo ABC si sa che $A\hat{B}C \geq 90°$. Sul lato AC si hanno i tre punti D, E, F individuati dalle seguenti proprietà:

$$D\hat{B}C = D\hat{C}B\,, \quad A\hat{B}E = E\hat{B}D\,, \quad F\hat{B}C = E\hat{B}D\,.$$

Se allora b è la bisettrice dell'angolo $\hat{A}$, prova che risulta

$$b \perp BF\,.$$

Esercizio 2.5. Se di un triangolo ABC si sa che:

1. L è il punto medio di BC;

2. $\overline{AL} = \overline{AB} = 5$;

3. l'area di ABC è 15,

vi sono due possibilità:

o risulta $\overline{AC} = \ldots$ e $\overline{BC} = \ldots$,

oppure $\overline{AC} = \ldots$ e $\overline{BC} = \ldots$.

Risposta: $\overline{AC} = 3\sqrt{5}$, $\overline{BC} = 2\sqrt{10}$; $\overline{AC} = \sqrt{205}$, $\overline{BC} = 6\sqrt{10}$.

Esercizio 2.6. Due corde parallele A_1B_1 e A_2B_2 di una circonferenza $\mathcal{C}$ hanno lunghezze rispettive 14 e 12. Se la distanza fra esse è $d = 1$, quali sono le distanze rispettive dal centro O di $\mathcal{C}$? Lo stesso risultato si avrebbe se la distanza tra A_1B_1 e A_2B_2 fosse $d = \dots$

Risposta: $d(O, A_1B_1) = 6$, $d(O, A_2B_2) = 7$; $d = 13$.

Esercizio 2.7. Un triangolo ha i lati che hanno misure a, b, c, con

$$\frac{a}{b} = \frac{2}{3}, \quad \frac{b}{c} = \frac{4}{5}.$$

Ricordando che l'area $\mathcal{S}$ di un triangolo di lati lunghi a, b, c è data dalla formula di Erone

$$\mathcal{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

ove p è il semiperimetro del triangolo stesso, trova a, b e c sapendo che

$$\mathcal{S} = 20\sqrt{1463}.$$

Risposta: $a = 16$, $b = 24$, $c = 30$.

Esercizio 2.8. Quali sono le possibili lunghezze del lato AB di un triangolo ABC, se $\overline{BC} = 8$, $\overline{AC} = 12$, e l'area di ABC è $4\sqrt{63}$?

Risposta: $\overline{AB} = \sqrt{352}$, oppure $\overline{AB} = 8$.

Esercizio 2.9. Trova il centro I e il raggio r della circonferenza inscritta nel triangolo di vertici

$$A(-p, 0), \quad B(p, 0), \quad C\left(0, \frac{2p^2}{p^2-1}\right) \qquad (\forall\, p > 1).$$

Per quali valori di p il triangolo ABC di cui sopra risulta inscritto in una circonferenza di raggio $\dfrac{25}{8}$?

Risposta: $I(0, 1)$, $r = 1$; $p = 3$ oppure $p = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$.

Esercizio 2.10. È dato l'arco di cerchio

$$\mathcal{C}': \begin{cases} x^2 + y^2 = (2R)^2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

e il semicerchio

$$\mathcal{C}'': \begin{cases} (x-R)^2 + y^2 = R^2 \\ y \geq 0 \end{cases} .$$

Per ogni retta $r_m\colon y = mx$, con $m \geq 0$ siano A'_m e A''_m i punti, diversi da O, che r_m interseca su $\mathcal{C}'$ e $\mathcal{C}''$ nell'ordine.

Trova per quali valori di m risulta, rispettivamente,

a) $\overline{A''_m A'_m} = \dfrac{R}{2}$;

b) $\overline{A''_m A'_m} = R$;

c) $\overline{0A''_m} = \overline{A''_m A'_m}$.

Risposta: a) $m = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$; b) $m = \sqrt{3}$; c) $m = \sqrt{3}$ (N.B.: stesso valore di m del punto b)).

Esercizio 2.11. ABC è un triangolo rettangolo in C e isoscele, con $\overline{BC} = \overline{AC} = l$. A quale distanza d dall'ipotenusa AB deve trovarsi una retta r, ad essa parallela, per intercettare fra i due cateti un segmento di lunghezza l?

Risposta: $d = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\, l$.

Esercizio 2.12. ABC è un triangolo rettangolo in C e isoscele, con $\overline{BC} = \overline{AC} = l$. Siano $\mathbf{D}_A$ e $\mathbf{D}_B$ i due dischi di centri rispettivi A e B e raggio R. Trova l'area a della regione fusiforme $\mathbf{F} = \mathbf{D}_A \cap \mathbf{D}_B$.

Risposta: $a = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\, R^2$.

Esercizio 2.13. Trova le soluzioni dell'equazione

$$\frac{1}{\dfrac{1}{\frac{1}{x}-1}+2} = \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-6}\,.$$

Risposta: $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$.

Esercizio 2.14. Un angolo α ha come misura in gradi 126: qual è la sua misura in radianti? Quanto valgono $\cos\alpha$, $\sin\alpha$ e $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$?

Risposta: $\dfrac{7\pi}{10}$; $\cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{5-2\sqrt{5}}{6-2\sqrt{5}}}$; $\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}-1}$; $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{5} - 1 + \sqrt{5-2\sqrt{5}}$.

Esercizio 2.15. In un triangolo ABC si ha $\overline{AB} = l$ e $\overline{BC} = \dfrac{l}{2}$. Trova le possibili misure di AC, se l'area di ABC è $\dfrac{1}{8}\, l^2$.

Risposta: $\overline{AC} = \dfrac{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}{2}\, l$, oppure $\overline{AC} = \dfrac{\sqrt{5-2\sqrt{3}}}{2}\, l$.

Esercizio 2.16. Dato un angolo acuto α tale che $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}$, trova la misura in gradi di 2α usando la formula di duplicazione $\operatorname{tg} 2\alpha = \dots$.

Risposta: $2\alpha = 135°$ (dunque $\alpha = 67°\,30'$).

Esercizio 2.17. È dato un semidisco circolare $\mathbf{D}$ di diametro AB e raggio R, e sia O il punto medio di AB; sia C un punto di OB e $\mathbf{D}'$, $\mathbf{D}''$ siano i semidischi di diametri rispettivi AC e CB:

1. trova a che distanza d_1 deve stare C affinché l'area di $\mathbf{D}' \cup \mathbf{D}''$ sia $\dfrac{5}{16}\,\pi R^2$;

2. trova a che distanza d_2 deve stare C affinché l'area del "trincetto" $\mathbf{D} \setminus (\mathbf{D}' \cup \mathbf{D}'')$ sia $\dfrac{7}{64}\,\pi R^2$.

Risposta: $d_1 = \dfrac{R}{2}$; $d_2 = \dfrac{R}{4}$.

Esercizio 2.18. Dati nel piano Oxy i due luoghi

$$\mathcal{L}_1\colon 3x^2 + 5xy + y^2 + 17 = 0$$
$$\mathcal{L}_2\colon 4x^2 - y^2 - 20 = 0\,,$$

trova i punti comuni a $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$.

Risposta: $A(3, -4)$, $B(-3, 4)$.

Esercizio 2.19. Un rettangolo è inscritto in una semicirconferenza di raggio 5 e ha le diagonali lunghe $2\sqrt{13}$: qual'è l'area a del rettangolo?

Risposta: $a = 12$.

Esercizio 2.20. Un quadrilatero convesso $ABCD$ è inscritto in una circonferenza di raggio r e ha i due lati opposti AB e CD paralleli. Se la distanza tra AB e CD è r, e l'area di $ABCD$ è $\sqrt{3}r^2$, quali sono le misure dei lati e gli angoli ai vertici di $ABCD$?

Risposta: $\overline{AB} = \overline{CD} = \sqrt{3}r$, $\overline{BC} = \overline{AD} = r$, $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = 90°$ ($ABCD$ è un rettangolo).

Esercizio 2.21. Nel piano cartesiano Oxy è data la retta $r\colon 3x - 4y - 9 = 0$; sia $\mathcal{C}$ il circolo tangente in $P_1(3, 0)$ a r e avente il centro sull'asse Oy: trova l'equazione di $\mathcal{C}$; trova quindi i punti che $\mathcal{C}$ interseca sull'asse Oy, e siano P_2 e P_3; trova le equazioni delle rette r_2 ed r_3 tangenti ia $\mathcal{C}$ in P_2 e P_3, rispettivamente. Posto infine

$$P_4 = r \cap r_2 \quad \text{e} \quad P_5 = r \cap r_3$$

trova l'area del trapezio $P_2P_4P_5P_3$. (Conviene fare un grafico accurato con unità di misura di 3 lati di griglia).

Risposta: $a = \dfrac{250}{3}$.

Esercizio 2.22. Per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$ è assegnata nel piano cartesiano Oxy la terna di punti

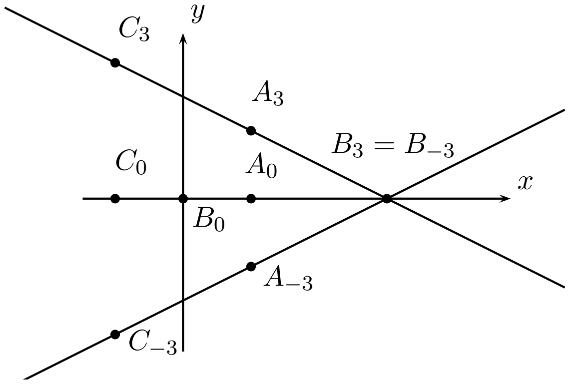
$$A_t(3, t), \quad B_t(t^2, 0), \quad C_t(-3, 2t)\,.$$

1. Trova per quali t i tre punti A_t, B_t, C_t risultano allineati, rappresentando le rette che li contengono nei casi trovati, sia analiticamente che graficamente.

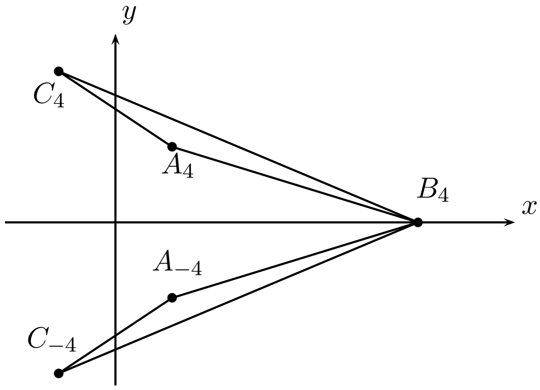
2. Trova per quali valori di t il triangolo $A_tB_tC_t$ ha area 5, rappresentando graficamente i triangoli trovati.

Risposta:

1. $t = 0,\ 3,\ -3$:
retta$(A_0B_0C_0)$: $y = 0$,
retta$(A_3B_3C_3)$: $y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{9}{2}$,
retta$(A_{-3}B_{-3}C_{-3})$: $y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{9}{2}$.



2. $t = 4$ e $t = -4$: $A_4(3,4)$, $B_4(16,0)$, $C_4(-1,8)$, $A_{-4}(3,-4)$, $B_{-4}(16,0)$, $C_{-4}(-1,-8)$.



Esercizio 2.23. Trova, per i vari valori del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathbf{S}(a)$ delle soluzioni della seguente disequazione

$$|x| + \frac{1}{|x|} > \frac{2}{9}\,a$$

(Suggerimento: fare riferimento al grafico riportato dopo l'esercizio 2.25).

Risposta:

- per $a \in]-\infty, 9[$, $\quad \mathbf{S}(a) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- per $a = 9$, $\quad \mathbf{S}(9) = \mathbb{R} \setminus \{-1,\ 0,\ 1\}$;
- per $a \in]9, +\infty[$, posto

$$f(a) = \frac{\sqrt{2a^2 - 81 - 2a\sqrt{a^2 - 81}}}{9} \quad \text{e} \quad g(a) = \frac{\sqrt{2a^2 - 81 + 2a\sqrt{a^2 - 81}}}{9}$$

risulta

$$\mathbf{S}(a) =]-\infty,\, -g(a)[\, \cup\,]-f(a)[,\, 0[\, \cup\,]0,\, f(a) \cup\,]g(a),\, +\infty[\,.$$

Esercizio 2.24. Trova, per i vari valori del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathbf{S}_0(a)$ delle soluzioni della seguente equazione

$$|x| + \frac{1}{|x|} = \frac{2}{9}\, a$$

(Suggerimento: fare riferimento al grafico riportato dopo l'esercizio 2.25).

Risposta:

- per $a \in]-\infty, 9[$, $\quad \mathbf{S}_0(a) = \emptyset$;
- per $a = 9$, $\quad \mathbf{S}_0(9) = \{-1,\, 1\}$;
- per $a \in]9, +\infty[$, definiti $f(a)$ e $g(a)$ come nell'esercizio 2.23, risulta

$$\mathbf{S}_0(a) = \{-g(a),\, -f(a),\, f(a),\, g(a)\}\,.$$

Esercizio 2.25. Trova, per i vari valori del parametro $a \in \mathbb{R}$, l'insieme $\mathbf{S}'(a)$ delle soluzioni della seguente disequazione

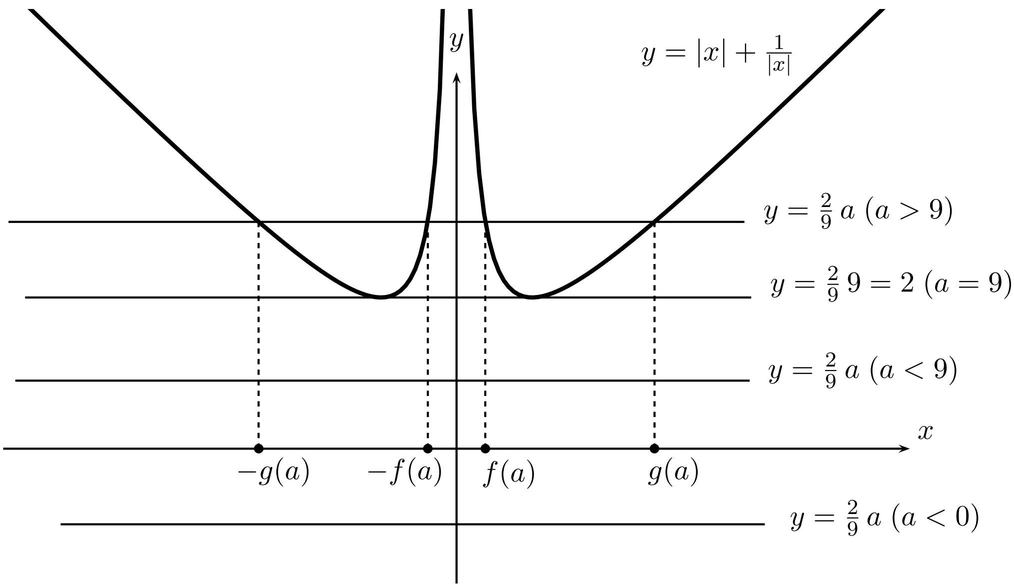
$$|x| + \frac{1}{|x|} < \frac{2}{9}\, a$$

(Suggerimento: fare riferimento al grafico riportato dopo l'esercizio).

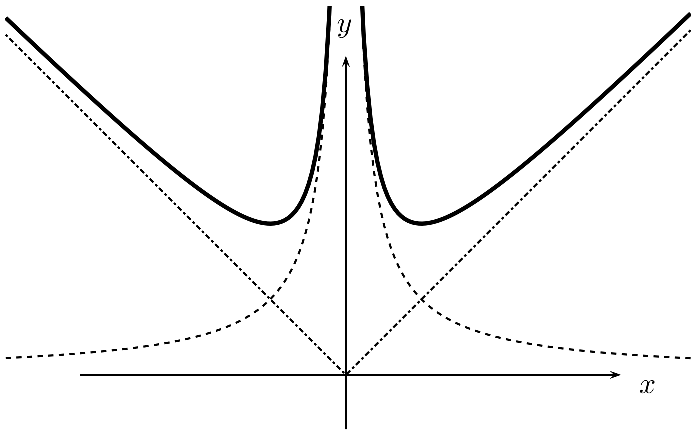
Risposta:

- per $a \in]-\infty, 9]$, $\quad \mathbf{S}'(a) = \emptyset$;
- per $a \in]9, +\infty[$, definiti $f(a)$ e $g(a)$ come nell'esercizio 2.23, risulta

$$\mathbf{S}'(a) =]-g(a),\, -f(a)[\, \cup\,]f(a),\, g(a)[\,.$$



Per facilitare il tracciamento del grafico di $y = |x| + \dfrac{1}{|x|}$, è utile tracciare preventivamente i grafici di $y = |x|$ e $y = \dfrac{1}{|x|}$, e poi procedere alla somma, come indicato nella figura che segue.



Esercizio 2.26. Nel piano cartesiano Oxy è dato il punto $A(4, 3)$. Per ogni

$$m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

siano

$r(m)$ la retta per A di coefficiente angolare m;

$p(m)$ la retta per A ortogonale alla retta $r(m)$;

$R(m) = r(m) \cap Ox\,; \quad P(m) = p(m) \cap Ox.$

1. Esprimi l'area $a(m)$ del triangolo $AP(m)R(m)$ in funzione di m;

2. trova per quali valori di m risulta $a(m) = \dfrac{45}{4}$;

3. trova il valore minimo che $a(m)$ può assumere e in quali valori di m lo assume;

4. il valore di $a(m)$ può essere un qualunque numero maggiore o uguale al minimo trovato al punto precedente? (Suggerimento: servirsi dei risultati degli esercizi 2.23, 2.24, 2.25).

Risposta:

1. $a(m) = \dfrac{9}{2}\left(|m| + \dfrac{1}{|m|}\right)$;

2. $m = -2,\ -\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 2$;

3. valore minimo di $a(m) = 9$, assunto per $m = 1$ e $m = -1$;

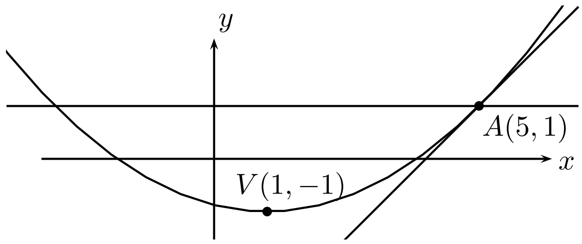
4. la risposta al quesito è affermativa.

Esercizio 2.27. Nel piano cartesiano Oxy è dato il punto $A(1, 0)$ e la retta per A $r\colon y = -x + 1$. trova l'espressione cartesiana del luogo $\mathcal{L}$ dei vertici V delle parabole con asse verticale, passanti per A e con tangente in A la retta r.

Risposta: $\mathcal{L}\colon y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$
(N.B.: $\mathcal{L}$ è la retta passante per A, con coefficiente angolare $-\dfrac{1}{2}$).

Esercizio 2.28. Nel piano cartesiano Oxy è data la retta di equazione $y = 1$. Trova per quale punto $A \in r$ passa una parabola $\mathcal{C}$ con asse verticale, con tangente in A una retta r di coefficiente angolare $m = 1$ e avente vertice in $V(1, -1)$. Fornisci l'equazione di $\mathcal{C}$, il suo grafico e il grafico di r.

Risposta: Il punto è $A(5, 1)$ ed è $\mathcal{C}\colon y = \dfrac{1}{8}x^2 - \dfrac{1}{4}x - \dfrac{7}{8}$, $r\colon y = x - 4$.



Esercizio 2.29. È data, nel campo reale, l'espressione

$$f(x) = \left(\sqrt[3]{(x+1)\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}} : \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \right) \cdot \sqrt{\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}}\,.$$

1. Trova l'insieme dei numeri reali $\mathbf{D}$ per i quali $f(x)$ è definita.

2. È vero che, $\forall\, x \in \mathbf{D}$, risulta $f(x) = \sqrt[6]{\dfrac{x-1}{x+1}}$?

Risposta:

1. $\mathbf{D} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;

2. *non è vero*, perché, ad esempio, per $x = -2$ si trova

$$f(-2) = -\sqrt[6]{3} \neq \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{\frac{-2-1}{-2+1}}\,.$$

Esercizio 2.30. Semplifica correttamente l'espressione $f(x)$ assegnata nell'esercizio 2.29.

Risposta:

per $x \in]-\infty, -1[$ si ha $f(x) = -\sqrt[6]{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

per $x \in]1, +\infty[$ si ha $f(x) = \sqrt[6]{\dfrac{x-1}{x+1}}$;

Esercizio 2.31. Trova le soluzioni della disequazione trigonometrica

$$(2\sqrt{3}-4)\cos x - 2\sin x + 2\sqrt{3} - 2 \geq 0\,,$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Risposta: $x \in \left[0,\, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3},\, 2\pi\right]$.

Esercizio 2.32. Trova le soluzioni della disequazione trigonometrica

$$\left[(4+2\sqrt{3})\cos x - 2\sin x - 2\sqrt{3} - 2\right]\left[(4-2\sqrt{3})\cos x + 2\sin x - 2\sqrt{3} + 2\right] > 0$$

nell'intervallo $[-\pi,\, \pi]$.

Risposta: $x \in \left]-\frac{\pi}{3},\, \frac{\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{\pi}{6},\, \frac{2\pi}{3}\right[$.

Esercizio 2.33. Trova per quali $a \in \mathbb{R}^+$ esiste un trapezio isoscele con un assegnato perimetro p e che abbia area a (*suggerimento*: ogni trapezio isoscele è equiesteso a un parallelogramma -non rettangolo- di pari perimetro, dunque. . .).

Risposta: Per ogni $a \in \left]0,\, \frac{p^2}{16}\right[$.

Esercizio 2.34. Nel piano Oxy è data la parabola $\mathcal{C}\colon y = x^2$. Trova il raggio e l'equazione della circonferenza di centro $P(0, 4)$ che interseca su $\mathcal{C}$ i quattro vertici di un trapezio isoscele di area $5 + 5\sqrt{6}$. Fornisci le coordinate dei quattro vertici del trapezio.

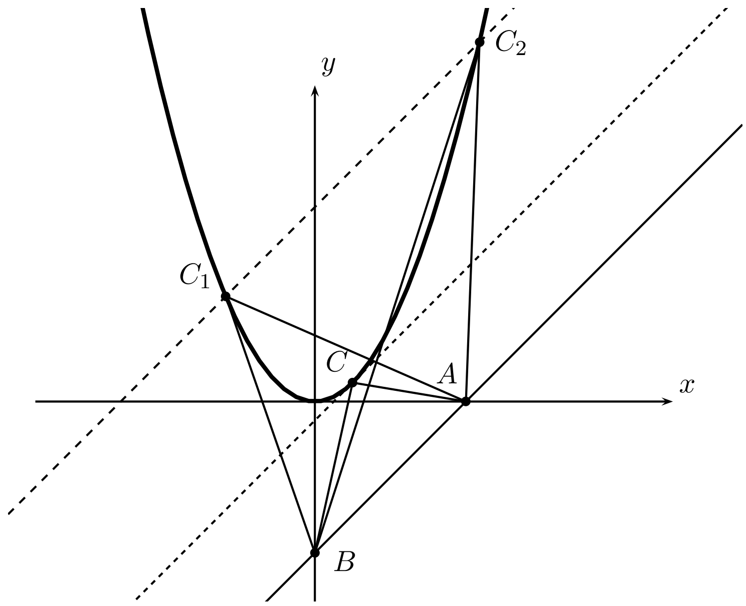
Risposta: $r = \sqrt{10}$; $x^2 + y^2 - 8y + 6 = 0$; $(1,\, 1)$, $(-1,\, 1)$, $(\sqrt{6},\, 6)$, $(-\sqrt{6},\, 6)$.

Esercizio 2.35. Nel piano Oxy è data la parabola $\mathcal{C}\colon y = x^2$ e i due punti $A(2, 0)$ e $B(0, -2)$. Trova per quali $a \in]0,\, +\infty[$ esiste un triangolo di area a, con due vertici in $A(2, 0)$ e $B(0, -2)$ e il terzo vertice $C \in \mathcal{C}$. Precisa per ogni a trovato quanti sono i triangoli richiesti, fornendo di ciascuno le coordinate del terzo vertice $C \in \mathcal{C}$.

Risposta: Esiste almeno un triangolo di area a del tipo richiesto per ogni $a \in \left[\frac{7}{4},\, +\infty\right[$; per $a = \frac{7}{4}$ il triangolo è unico e ha il vertice $C\left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{4}\right) \in \mathcal{C}$; per $a > \frac{7}{4}$ i triangoli sono sempre due, di vertici rispettivi

$$C_1\left(\frac{1-\sqrt{4a-7}}{2}\,,\, \left[\frac{1-\sqrt{4a-7}}{2}\right]^2\right)\,, \quad C_2\left(\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2}\,,\, \left[\frac{1+\sqrt{4a-7}}{2}\right]^2\right)\,,$$

il primo sul ramo sinistro e il secondo sul ramo destro della parabola, aventi entrambi origine nel suo punto $C\left(\frac{1}{2},\, \frac{1}{4}\right)$: la retta$(C_1, C_2)$ è sempre parallela alla retta(A, B).



ABC è il triangolo di area minima$= \frac{7}{4}$; la tangente alla parabola in C è parallela alla retta(A, B) e ha equazione $y = x - \frac{1}{4}$.

Esercizio 2.36. Nel piano Oxy sono dati i due circoli

$$\mathcal{C}_1 \colon x^2 + y^2 - 4x - 4y + 4 = 0\,, \quad \mathcal{C}_2 \colon x^2 + y^2 + 4x + 8y + 16 = 0\,.$$

Tra le rette del tipo $r_m \colon y = mx - 1$ trova quella che risulta tangente a entrambi $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, e i suoi punti di contatto con essi. Trova poi le altre rette tangenti a entrambi $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, e di ciascuna i punti di contatto con essi. (Suggerimento: esegui un accurato grafico con unità di misura di due lati di griglia).

Risposta: $r_{\frac{5}{12}} \colon y = \frac{5}{12}\,x - 1\,,\ P_{11}\left(\frac{36}{13}, \frac{2}{13}\right)\,,\ P_{12}\left(-\frac{36}{13}, -\frac{28}{13}\right)$;
posto $t_1 = r_{\frac{5}{12}}$, le altre bitangenti a $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ sono le tre rette

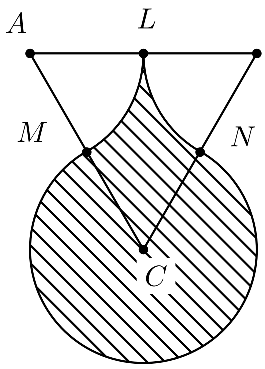
$$t_2 \colon x = 0\,,\ P_{21}(0, 2)\,,\ P_{22}(0, -4);$$

$$t_3 \colon y = \frac{3}{2}\,x + \sqrt{13} - 1\,,\ P_{31}\left(\frac{2\sqrt{13} - 6}{\sqrt{13}}, \frac{2\sqrt{13} + 4}{\sqrt{13}}\right)\,,\ P_{32}\left(\frac{-2\sqrt{13} - 6}{\sqrt{13}}, \frac{-4\sqrt{13} + 4}{\sqrt{13}}\right);$$

$$t_4 \colon y = \frac{3}{2}\,x - \sqrt{13} - 1\,,\ P_{41}\left(\frac{2\sqrt{13} + 6}{\sqrt{13}}, \frac{2\sqrt{13} - 4}{\sqrt{13}}\right)\,,\ P_{42}\left(\frac{-2\sqrt{13} + 6}{\sqrt{13}}, \frac{-4\sqrt{13} - 4}{\sqrt{13}}\right).$$

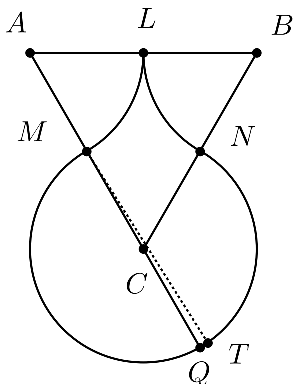
Esercizio 2.37. ABC è un triangolo equilatero di lato l; L, M, N sono i punti medi dei lati rispettivi in figura; gli archi di circolo LM, LN e MPN hanno centri rispettivi in A, B, C. Trova l'area della regione "a goccia" evidenziata.

Risposta: $a = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{8}\right) l^2$.

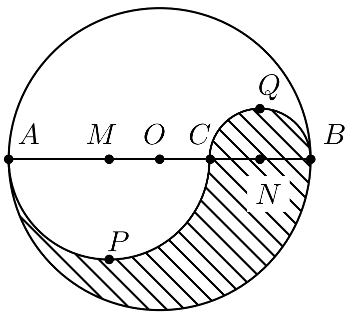


Esercizio 2.38. Riconsidera la regione $\mathcal{G}$ "a goccia" dell'esercizio 2.37: sia Q l'altro estremo del diametro del circolo $\mathcal{C}$ di centro C e raggio $\frac{l}{2}$ avente un estremo in M. Trova a quale distanza d dal diametro MQ deve essere scelto quel punto T tale che la corda MT di $\mathcal{C}$ divida "la goccia" $\mathcal{G}$ in due parti equiestese.

Risposta: $d = \left(\frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{8}\right) l \simeq 0.04l = \frac{1}{25}\, l.$



Esercizio 2.39. È dato un disco circolare $\mathcal{D}$ di raggio r e centro O.



Se AB è un diametro di $\mathcal{D}$ e C è un punto di AB, M sia il punto medio di AC e N il punto medio di CB. Costruiti i due semicerchi APC, di centro M, e CQB, di centro N, come nella figura precedente, trova a che distanza d da A deve essere scelto il punto C affinché l'area della regine evidenziata ("il girino") sia $\frac{1}{3}$ dell'area di $\mathcal{D}$. (N.B.: è come richiedere che l'area della regione del "girino scuro" sia $\frac{1}{2}$ di quella del "girino bianco", suo complemento rispetto a $\mathcal{D}$).

Risposta: $d = \frac{4}{3}\, r$.

Esercizio 2.40. Risolvi la seguente disequazione

$$\frac{1}{\sqrt{x^3} - \sqrt{x^4 - x^2}} \geq \frac{1}{x^2 - 1 - x}\,.$$

(Suggerimento: tieni conto che, per numeri reali entrambi non negativi, vale l'identità $a - b = (\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})\ldots$).

Risposta: $x \in \left[1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$.

Esercizio 2.41. Nel piano Oxy sono dati i due circoli

$$\mathcal{C}_1 \colon x^2 + y^2 - 4x + 2y + 4 = 0\,, \quad \mathcal{C}_2 \colon x^2 + y^2 - 6y + 4\sqrt{2} = 0\,.$$

Di ognuno dei circoli che hanno centro sull'asse Oy e sono tangenti sia a $\mathcal{C}_1$ che a $\mathcal{C}_2$ fornisci il centro e il raggio.

(Suggerimento: fornisci anche i valori approssimati dei centri e raggi dei circoli trovati, e realizza un grafico accurato della situazione con unità di quattro lati di griglia).

Risposta: Si trovano quattro circoli, due dei quali sono:

$$\mathcal{C}', \text{ di centro } C'\left(0, \frac{5\sqrt{2}-7}{\sqrt{2}-2}\right) \simeq (0, -0.121) \text{ e raggio } r' = \frac{4-\sqrt{2}}{2} \simeq 0.193\,;$$

$$\mathcal{C}'', \text{ di centro } C''\left(0, \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) \simeq (0, 1.707) \text{ e raggio } r'' = \frac{3+\sqrt{2}}{2} \simeq 3.121\,.$$

(N.B.: $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ tangono esternamente $\mathcal{C}'$ e internamente $\mathcal{C}''$).

Esercizio 2.42. $ABCD$ è un quadrilatero convesso: si sa che $\overline{AB} = 4$, $\overline{BC} = \overline{BD} = 2$, $\overline{CD} = 1$ e $A\hat{B}C = 120°$. Trova

1. i coseni degli angoli $B\hat{C}D$, $C\hat{B}D$ e $D\hat{B}A$, con le loro misure approssimate in gradi;

2. le misure di AC e AD;

3. i coseni di $C\hat{D}A$ e di $B\hat{A}D$, con le loro misure approssimate in gradi.

(Suggerimento: realizza con riga e compasso un accurato grafico con unità di misura 4 lati di griglia...).

Risposta:

$$\cos B\hat{C}D = \frac{1}{4},\ B\hat{C}D = 75°\,31'\,20'', 96\ldots;$$

$$\cos C\hat{B}D = \frac{7}{8},\ C\hat{B}D = 28°\,57'\,18'', 09\ldots;$$

$$\cos D\hat{B}A = \frac{3\sqrt{5}-7}{15}\ (<0),\ D\hat{B}A = 91^\circ\, 2'\, 41'', 91\ldots;$$

$$\overline{AC} = \sqrt{28};\ \overline{AD} = \sqrt{27-3\sqrt{5}};$$

$$\cos C\hat{D}A = -\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{27-3\sqrt{5}}},\ C\hat{D}A = 138^\circ\, 7'\, 25'', 4\ldots;$$

$$\cos B\hat{A}D = \frac{39-3\sqrt{5}}{8\sqrt{27-3\sqrt{5}}},\ B\hat{A}D = 26^\circ\, 21'\, 13'', 65\ldots.$$

Esercizio 2.43. Risolvi la disequazione

$$\sin^2 x - \cos^2(2x) > 0$$

nell'intervallo $[0, 2\pi]$.

Risposta: $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right[.$

Esercizio 2.44. Nel piano Oxy di un triangolo ABC sono dati

1. il vertice $A(0,1)$;

2. il vertice $B(2,0)$;

3. l'ortocentro $\Omega(2,3)$ (l'ortocentro è il punto di incontro delle tre altezze).

Trova il terzo vertice C del triangolo.

Risposta: $C\left(\frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$.

Esercizio 2.45. Nel piano Oxy sono dati i due punti $A(= O(0,0)$ e $L(5,0)$. Trova gli altri due vertici B e C dei triangoli aventi:

1. A come vertice e B nel semipiano delle $y > 0$;

2. L come punto medio del lato BC;

3. area 15.

Risposta: Si trovano due triangoli con i vertici, diversi da A, rispettivamente nei punti

$$\begin{aligned} B_1(4,3) \quad &\text{e} \quad C_1(6,-3)\,, \\ B_2(-4,3) \quad &\text{e} \quad C_2(14,-3)\,. \end{aligned}$$

Esercizio 2.46. Nel piano cartesiano Oxy è data la circonferenza

$$\mathcal{C}\colon x^2 + y^2 - 4x - 16 = 0$$

e i due punti

$$A(4,2) \quad , \quad B(1,3)\,.$$

Trova il centro, il raggio e l'equazione della circonferenza $\mathcal{C}'$ che passa per A e B e interseca $\mathcal{C}$ su due suoi punti diametralmente opposti, dei quali si chiedono le coordinate.

Risposta: $\mathcal{C}'\colon x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$; centro di $\mathcal{C}'$: $C(1,-2)$; raggio di $\mathcal{C}'$: $r = 5$; $\mathcal{C} \cap \mathcal{C}' = \{P(6,-2),\ Q(-2,2)\}$.

Esercizio 2.47. Risolvi la disequazione seguente

$$\frac{x^3 - \sqrt{x^6 - 2}}{x} \geq 0\,.$$

Risposta: $x \in \left]-\infty,\, -\sqrt[6]{2}\right] \cup \left[\sqrt[6]{2},\, +\infty\right[$.

Esercizio 2.48. Trova l'insieme $\mathbf{D}$ dei numeri reali positivi x per i quali ha significato l'espressione

$$f(x) = \frac{x^3 - \sqrt{x^6 - 2}}{x} + \frac{x^3 - \sqrt{x^6 - 2}}{x}\sqrt{\frac{x^3 - \sqrt{x^6 - 2}}{x} + 4x^2\left(x^3 + \sqrt{x^6 - 2}\right)}\,.$$

Trova poi per quale intero n si ha l'identità

$$f(x) = nx^2\,,\ \forall\, x \in \mathbf{D}\,.$$

Risposta: $\mathbf{D} = \left[\sqrt[6]{2},\, +\infty\right[$; $n = 4$.

Esercizio 2.49. Risolvi la seguente disequazione trigonometrica, nell'intervallo $[0,\, 2\pi]$.

$$3\cos^4 x - 10\sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^4 x \geq 0\,.$$

Risposta: $x \in \left[0,\, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3},\, \frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6},\, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{4\pi}{3},\, \frac{5\pi}{3}\right]$.

Esercizio 2.50. Nel piano cartesiano Oxy di un quadrilatero convesso $ABCD$ si sa che

1. $ABCD$ è contenuto nel semipiano $\sigma\colon y \geq 0$;

2. le coordinate di A e B sono, rispettivamente, $(1,\, 0)$ e $(2,\, 0)$;

3. $\overline{BC} = 2$, $\overline{CD} = 3$, $\overline{DA} = 4$;

4. $\hat{B} = 120°$.

Individua i due vertici C e D; calcola $\cos\hat{C}$; $\cos\hat{D}$; $\cos\hat{A}$ e le misure approssimate in gradi di $\hat{C}$, $\hat{D}$, $\hat{A}$; calcola $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$.
(Suggerimento: redigi un grafico accurato, con riga e compasso, con unità due lati di griglia. . .).

Risposta: $C(3,\, \sqrt{3})$, $D\left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}},\, \sqrt{3} + \frac{6}{\sqrt{7}}\right)$; $\cos\hat{C} = -\frac{3}{2\sqrt{21}}$, $\hat{C} = 109°\,6'\,23'',78\ldots$; $\cos\hat{D} = \frac{3}{4}$, $\hat{D} = 41°\,24'\,34'',64\ldots$; $\cos\hat{A} = \frac{2\sqrt{7} - 3\sqrt{3}}{4\sqrt{7}}$, $\hat{A} = 89°\,29'\,1''\,,58\ldots$; $\overline{AC} = \sqrt{7}$; $\overline{BD} = \sqrt{13 + \frac{18}{\sqrt{21}}} \simeq 4,114$.

Esercizio 2.51. Un trapezio $ABCD$ è rettangolo in A, le sue diagonali sono ortogonali, la sua base maggiore misura $4a$ e la sua altezza misura $3a$. Trova l'area $\mathcal{A}$ e il perimetro p del trapezio.

Risposta: $\mathcal{A} = \frac{75}{8}\,a^2$; $p = \frac{37 + sqrt193}{4}\,a$.

Esercizio 2.52. A una circonferenza di raggio r è circoscritto un trapezio rettangolo il cui lato obliquo misura $(13/6)r$. Trova l'area $\mathcal{A}$ il perimetro p del trapezio.

Risposta: $\mathcal{A} = \dfrac{25}{6}\, r^2$; $p = \dfrac{25}{3}\, r$.

Esercizio 2.53. Un triangolo ABC è rettangolo in A, ha area 6 e perimetro 12. Siano P il punto dell'ipotenusa BC tale che $CP \equiv CA$ e Q il punto del cateto AB tale che risulti $CQ \perp AP$. Trova i possibili valori dell'area $\mathcal{A}$ e del perimetro p del triangolo BPQ.

Risposta: $\mathcal{A} = \dfrac{3}{2}$, $p = 6$; $\mathcal{A} = \dfrac{2}{3}$, $p = 4$.

Esercizio 2.54. Se A, B, C, D sono i vertici successivi di un parallelogramma, sia P un punto del lato CD tale che $\overline{PC} = (1/3)\overline{AB}$. Detto Q il punto di intersezione della retta per A e P con il prolungamento del lato BC, qual è il rapporto delle aree dei due triangoli APD e PQC?

Risposta: 4.

Esercizio 2.55. Per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$ l'equazione nell'incognita x

$$t^2x^2 - t^2x + t - 1 = 0$$

ha una radice che è il quadrato dell'altra? Per ogni t trovato fornisci le due radici dell'equazione, precisando la relazione che intercorre fra esse.

Risposta:

$$\begin{array}{llll}
t_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, & x_1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1} & x_2 = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} : & x_1 = x_2^2; \\
t_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}, & x_1 = \dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} & x_2 = \dfrac{2}{1-\sqrt{5}} : & x_1 = x_2^2; \\
t_3 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}, & x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} & x_2 = \dfrac{2}{3+\sqrt{5}} : & x_1^2 = x_2; \\
t_4 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, & x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} & x_2 = \dfrac{2}{3-\sqrt{5}} : & x_1^2 = x_2.
\end{array}$$

Esercizio 2.56. Un triangolo ABC è isoscele sulla base AB, ha i lati obliqui di misura l, e la base di misura $(\sqrt{5}-1)l/2$.

1. Calcola coseno e seno dell'angolo al vertice $\widehat{C}$ e degli angoli (uguali) alla base $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$;
2. verifica che $\widehat{A} = \widehat{B}$ è il doppio di $\widehat{C}$;
3. calcola le misure in radianti e in gradi di $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ e $\widehat{C}$;
4. detti $M\,(\in BC)$ e $N\,(\in AC)$ rispettivamente gli estremi delle bisettrici degli angoli in $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$, calcola $\overline{MN}$ e la distanza di MN dalla base AB in funzione di l;
5. detto I il punto di incontro delle bisettrici AM e BN (incentro di ABC), calcola perimetri e aree dei triangoli MNC, MNI, ABI, ANI, BMI;

6. calcola l'ampiezza degli angoli $M\widehat{I}N \equiv A\widehat{I}B$ e $A\widehat{I}N \equiv B\widehat{I}M$;

7. detti H e K i punti in cui il circolo inscritto in ABC tocca i lati AC e BC, calcola $\overline{HK}$ e la distanza di HK dalla base AB, in funzione di l;

8. calcola, in funzione di l, la misura del lato di un triangolo equilatero equiesteso ad ABC;

9. calcola, in funzione di l, le misure $b = c$ dei cateti e a dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo isoscele equiesteso ad ABC.

Esercizio 2.57. Trova i numeri interi positivi n che hanno entrambe le seguenti proprietà:

1. $\exists x$, intero positivo, tale che sia

$$x^2 - x + 1 = n - 47\,;$$

2. $\exists y$, intero positivo, tale che sia

$$y^2 + y + 3 = n + 33\,.$$

Per ogni n trovato assegna la relativa coppia di numeri x e y.

Risposta: $n_1 = 60$, $x_1 = 4$, $y_1 = 9$; $n_2 = 180$, $x_2 = 12$, $y_2 = 14$; $n_3 = 390$, $x_3 = 19$, $y_3 = 20$; $n_4 = 1530$, $x_4 = 39$, $y_4 = 39$.

Esercizio 2.58. Nel piano cartesiano Oxy sono dati i punto $A = O(0, 0)$ e $B(8, 0)$. Trova l'equazione del luogo $\mathcal{L}$ dei punti $P(x, y)$ tali che si abbia:

$$\overline{AP} : \overline{BP} = 5 : 3\,.$$

Descrivi e disegna $\mathcal{L}$; trova e interpreta i punti in cui $\mathcal{L}$ interseca l'asse Ox.

Risposta: $\mathcal{L} \colon x^2 + y^2 - 25x + 100 = 0$; $\mathcal{L}$ è il circolo di centro $C(25/2, 0)$ e raggio $15/2$; $\mathcal{L} \cap Ox = \{D(5, 0)\,,\, E(20, 0)\}$; D ed E dividono internamente ed esternamente AB in parti proporzionali a 5 e 3.

Esercizio 2.59. Trova per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il polinomio

$$p_a(x) = (x - a)(x^2 + ax + 4\sqrt{3}\,a + 4)$$

ha uno zero di molteplicità > 1. Per ogni valore a_i di a trovato fornisci il relativo zero multiplo x_i di $p_{a_i}(x)$, ed esprimi $p_{a_i}(x)$ come prodotto di potenze di fattori lineari distinti.

Risposta:

$$\begin{aligned}
&a_1 = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{13}\,, && x_1 = -4\sqrt{3} - 2\sqrt{13}\,, && p_{a_1}(x) = (x + 4\sqrt{3} + 2\sqrt{13})^2(x - 8\sqrt{3} - 4\sqrt{13});\\
&a_2 = 8\sqrt{3} - 4\sqrt{13}\,, && x_2 = -4\sqrt{3} + 2\sqrt{13}\,, && p_{a_2}(x) = (x + 4\sqrt{3} - 2\sqrt{13})^2(x - 8\sqrt{3} + 4\sqrt{13});\\
&a_3 = -\sqrt{3} + 1\,, && x_3 = -\sqrt{3} + 1\,, && p_{a_3}(x) = (x + \sqrt{3} - 1)^2(x - 2\sqrt{3} + 2);\\
&a_4 = -\sqrt{3} - 1\,, && x_4 = -\sqrt{3} - 1\,, && p_{a_4}(x) = (x + \sqrt{3} + 1)^2(x - 2\sqrt{3} - 2).
\end{aligned}$$

Esercizio 2.60. $ABCD$ è un quadrato e $ABEF$ e $CDEF$ sono due trapezi isosceli di basi maggiori rispettivamente AB e CD e base minore comune EF, segmento interno al quadrato. Sapendo inoltre che

1. l'angolo $A\widehat{F}D$ è un angolo retto,

2. $F\widehat{D}C = 2B\widehat{A}E$,

calcola l'ampiezza in gradi dell'angolo $B\widehat{A}F$ e il rapporto tra EF e il lato del quadrato.

Risposta: $B\widehat{A}F = 30°$; $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$.

Esercizio 2.61. Un triangolo ABC ha i lati AC e BC per i quali vale la proporzione

$$AC : BC = 3 : 2$$

e l'angolo in $\widehat{C}$ ha un'ampiezza di $\pi/3\,\mathrm{rad}$. Trova il perimetro p di ABC, rispetto a una data unità di misura, sapendo che l'area di ABC è

$$\mathcal{A} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\,.$$

Risposta: $p = \dfrac{2\sqrt{7}+10}{3\sqrt{3}}$.

Esercizio 2.62. Quanti sono i numeri di 5 cifre la somma delle cui cifre vale 43?

Risposta: 11

Esercizio 2.63. Se di un triangolo ABC si sa che $\overline{AB}+\overline{BC} = 20$ e si indica con p il perimetro, qual è l'intervallo numerico I nel quale p può assumere i suoi valori? Può assumere qualunque valore appartenente all'intervallo indicato?

Risposta: $I =]20, 40[$; si.

Esercizio 2.64. Se di un triangolo LMN si sa che $\overline{LM} + \overline{MN} = 20$, e che $\widehat{N} = \pi/4$, qual è il valore massimo che può avere l'area?

Risposta: $\mathcal{A}_{\max} = \dfrac{50}{\sqrt{2}}$.

Esercizio 2.65. Sapendo che il polinomio

$$p_a(x) = x^3 - 9x^2 + (24 - a^2)x + 4a^2 - 16$$

ha lo zero 4, per ogni $a \in \mathbb{R}$,

1. trova per quali $a \in \mathbb{R}$ $p_a(x)$ ha uno zero di molteplicità > 1;

2. trova per quali $a \in \mathbb{R}$ $p_a(x)$ ha 3 zeri positivi;

3. per i restanti valori di $a \in \mathbb{R}$, qual è la situazione degli zeri reali di $p_a(x)$?

Esercizio 2.66. Dato il polinomio

$$p_t(x) = 128x^3 - 32x^2 - (50 + 8t)x - 4t - 1\,,$$

si chiede:

1. se esiste un numero reale a che sia zero di $p_t(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$;

2. per quali $t \in \mathbb{R}$ $p_t(x)$ ha uno zero multiplo;

3. per quali $t \in \mathbb{R}$ $p_t(x)$ ha tre zeri reali distinti;

4. per i valori di $t \in \mathbb{R}$ diversi da quelli trovati nei due punti precedenti, qual è la situazione degli zeri reali di $p_t(x)$?

Esercizio 2.67. Dati i polinomi

$$p_t(x) = -tx^4 + (2 - 3t)x^3 + (t^2 - 2t + 6)x^2 + (3t^2 + 4)x + 2t^2\,,$$

e

$$q_b(x) = bx^2 + 12x + 2b$$

si chiede:

1. per quali $b \in \mathbb{R}$ $q_b(x)$ divide $p_t(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$;

2. per quali $a \in \mathbb{R}$ $p_t(x)$ ha zeri multipli;

3. per quali $t \in \mathbb{R}$ $p_t(x)$ ha 4 zeri reali e distinti.

Esercizio 2.68. Risolvi l'equazione goniometrica

$$\frac{1}{\sin^2 x} = 2\operatorname{ctg} x\,.$$

Risposta:

Esercizio 2.69. Risolvi, nell'intervallo $[0, 2\pi]$, il sistema di disequazioni goniometriche

$$\begin{cases} 2\cos x - 2\sin x \le \sqrt{3} - 1 \\ \cos^2 x - 2\sin x \ge 1 \end{cases}\,.$$

Esercizio 2.70. Sia ABC un triangolo rettangolo in A. È sempre possibile che un triangolo, con un vertice in A e la base DE sull'ipotenusa BC risulti equiesteso al quadrato avente per lato l'altezza h di ABC rispetto all'ipotenusa? Giustificare la risposta.

Risposta: Si

Esercizio 2.71. Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Qual è la misura in gradi dell'angolo $A\widehat{B}C$ affinchè l'area di ABC risulti uguale a quella del quadrato avente per lato il segmento AM, con M punto medio dell'ipotenusa BC?

Risposta: 60°.

Esercizio 2.72. Un rombo di lato l ha gli angoli ai vertici di misura $60°$ e $120°$. Qual è il rapporto fra l'area del rombo e quella del quadrato in esso inscritto?

Risposta: $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

Esercizio 2.73. Di un triangolo ABC sono assegnate due mediane, di lunghezze rispettive 6 e 3, intersecantesi nel baricentro G. Sapendo inoltre che le rette che sostengono le mediane formano fra loro un angolo di $60°$, quali sono i possibili valori del perimetro di un tale triangolo?

Risposta: $2\sqrt{21}+6\sqrt{3}$, $2\sqrt{13}+2\sqrt{6}+4$.

Esercizio 2.74. Determina la coppia di parametri reali (a, b) in modo che il polinomio

$$p(x) = -x^3 + (4+a)x^2 + (4-4a)x + b$$

sia divisibile per $(x-4)^2$.

Risposta: $(3, -16)$.

Esercizio 2.75. Risolvi la disequazione

$$x^5 + 6x^4 - 54x^2 - 81x < 0$$

(Suggerimento: cerca le radici razionali del polinomio. . .)

Risposta: $x \in]-\infty, -3[\cup]0, 3[$.

Esercizio 2.76. Di un triangolo ABC si sa che $\overline{AB} = 24$ e $\overline{BC} = 14$. Trova quanto deve valere $\overline{AC}$ in modo che risulti $\widehat{A} = \pi - 3\widehat{B}$.
(Suggerimento:

$$\overline{AC}^2 = (24)^2 + (14)^2 - 2 \cdot 24 \cdot 14 \cos \widehat{B} = \ldots$$
$$\frac{\overline{AC}}{\sin \widehat{B}} = \frac{24}{\sin \widehat{C}}, \text{ con } \widehat{C} = \pi - (\widehat{A} + \widehat{B}) \ldots :$$

se ne deduce un'equazione cubica in $\cos \widehat{B}$ con 3 radici razionali, delle quali una sola può essere quella pertinente. . .)

Risposta: $\overline{AC} = 18$.

Esercizio 2.77. Trova per quale valore di a il polinomio

$$p(x) = x^3 + (1-\sqrt{2})x^2 - 2(1+\sqrt{2})x + 2(1+\sqrt{2})$$

risulta divisibile per il polinomio $(x-a)^2$.

Risposta: $a = \sqrt{2}$.

Esercizio 2.78. È data l'equazione, nell'incognita x,

$$x^4 + 4(c+1)x^2 + 4c^2 - 4 = 0\,, \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Trova:

1. per quali c non ha alcuna soluzione reale;

2. per quali c ha una sola soluzione reale;

3. per quali c ha più di una soluzione reale.

Risposta:

1. per $c \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$;

2. per $c \in \{-1, 1\}$;

3. per $c \in]-1, 1[$.

Esercizio 2.79. Dato un quadrilatero convesso $ABCD$, sia H il punto comune alle due diagonali AC e BD. Avendo le seguenti informazioni:

$$\overline{DH} = \frac{1}{3}\overline{HB}\,, \quad \overline{AH} = \frac{1}{5}\overline{HC}\,, \quad \overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AC}\,, \quad D\widehat{A}C = \frac{\pi}{2}\,,$$

posto $\overline{AC} = 6d$, calcola il perimetro p di $ABCD$ in funzione di d, e inoltre la misura in radianti dell'angolo $D\widehat{C}B$.

Risposta: $p = (4\sqrt{10} + 2 + 5\sqrt{2})d\,; \quad D\widehat{C}B = \dfrac{\pi}{2}\,.$

Esercizio 2.80. Tre circonferenze complanari $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$, di raggi rispettivi 1, 2, 3 e centri rispettivi C_1, C_2, C_3 non allineati, sono a due a due tangenti. Qual è l'area del triangolo C_1, C_2, C_3?

Esercizio 2.81. Per quali valori del parametro $c \in \mathbb{R}$ la parabola $\mathcal{P}\colon y = 2x^2 + c$ e il circolo $\mathcal{C}\colon x^2 + y^2 = 1$ hanno esattamente 2 punti in comune?

Risposta: $x \in \left\{-\dfrac{17}{8}\right\} \cup]-1, 1[$.

Esercizio 2.82. Internamente tangenti a un circolo $\mathcal{C}$ di centro O e raggio R, vi sono due circoli $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ di ugual raggio r, i quali sono pure tangenti fra loro. Calcola, in funzione di r ed R, la distanza d della retta congiungente i centri O_1 e O_2, di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, da O e la lunghezza del segmento T_1T_2 congiungente i punti di tangenza di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ con O. Determina per quale relazione tra r e R risulta $d = R/2$, e per quale risulta che OT_1T_2 è triangolo equilatero.

Risposta: $d = \sqrt{R^2 - 2rR}$; $\overline{T_1T_2} = \dfrac{2rR}{R-r}$; $d = \dfrac{R}{2} \Leftrightarrow r = \dfrac{3}{8}R$; OT_1T_2 equilatero se e solo se $r = \dfrac{1}{3}R$.

Esercizio 2.83. È dato un triangolo equilatero ABC, e sia α il suo piano, G il suo baricentro, e n la retta ortogonale ad α per G. Calcola, in funzione del lato l di ABC,

1. a che distanza h da α deve trovarsi un punto $N \in n$ perché il triangolo ABN sia anch'esso equilatero;

2. quanto dista da C un siffatto punto N.

Risposta: $h = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\, l\,;\quad \overline{CN} = l.$

Esercizio 2.84. Trova le soluzioni dell'equazione goniometrica

$$\cos^2 x + (1-\sqrt{3})\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = 0$$

appartenenti all'intervallo $\left[-\dfrac{\pi}{2}\,,\,\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Esercizio 2.85. Un triangolo ABC ha i due lati AC e BC che misurano, rispettivamente, 4 e 6. Detto M il punto medio di AB, si sa che $\overline{CM} = \sqrt{10}$. Calcola $\overline{AB}$.

Risposta: $\overline{AB} = 8$.

Esercizio 2.86. È dato un triangolo ABC, con $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 6$, $\overline{AC} = b$. Al variare di b, fra quali estremi può variare la misura m della mediana relativa al lato AC?

Risposta: $\dfrac{1}{2} \le m \le \dfrac{11}{2}$.

Esercizio 2.87. Dimostra che, $\forall n \in \mathbb{N}$, il numero

$$4^n + 5$$

è divisibile per 3.

Esercizio 2.88. Dimostra che, $\forall n \in \mathbb{N}$, il numero

$$2^{4n+1} - 2^{2n} - 1$$

è divisibile per 9.

(Suggerimento: si può usare il risultato dell'esercizio 2.87).

Esercizio 2.89. Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il polinomio

$$p_a(x) = (x^2 + a)(x^2 - x - 1 - a)$$

possiede uno zero doppio? Precisa, per ogni valore di a trovato, il relativo zero doppio di $p(x)$.

Risposta: $a = -\dfrac{5}{4}\,,\ x = \dfrac{1}{2}\,;\ a = -1\,,\ x = 1\,;\ a = -\dfrac{1}{4}\,,\ x = -\dfrac{1}{2}\,;\ a = 0\,,\ x = 0\,.$

Esercizio 2.90. Dimostra che, $\forall n \in \mathbb{N}$, il numero

$$6^{2n+1} + 8$$

è divisibile per 7.

Esercizio 2.91. Riconosci che, $\forall n \in \mathbb{N}$, il numero

$$k_n = 6^{2n+1} - (-1)^n$$

è composto, precisando, per ognuno di essi, il più piccolo fattore primo.

Risposta: Per n pari k_n ha 5 come divisore proprio minimo; per n dispari k_n ha 7 come divisore proprio minimo.

Esercizio 2.92. Trova i numeri reali a, b, c tali che si abbia

$$p(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + c)(x^2 + bx + c).$$

Il polinomio $p(x)$ ammette reali?

Risposta: $a = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $b = \dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}$, $c = 1$ oppure $a = \dfrac{-\sqrt{5}+1}{2}$, $b = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$, $c = 1$. Il polinomio non ha radici reali.

Esercizio 2.93. Verifica che

$$\sin\left(\frac{\pi}{20}\,\mathrm{rad}\right) = \sin 9^\circ = \sqrt{\frac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$$

e calcola

$$\cos\left(\frac{\pi}{20}\,\mathrm{rad}\right)\,,\ \sin\left(\frac{9\pi}{20}\,\mathrm{rad}\right)\,,\ \sin\left(\frac{21\pi}{20}\,\mathrm{rad}\right)\,,\ \cos\left(\frac{19\pi}{20}\,\mathrm{rad}\right)\,.$$

Risposta: $\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$, $\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$, $-\sqrt{\dfrac{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$, $-\sqrt{\dfrac{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{8}}$.

Esercizio 2.94. Sfruttando il prodotto notevole

$$a^n - b^n = \ldots$$

esprimi il numero

$$2^{14} - 1$$

come prodotto di fattori primi.

Risposta: $2^{14} - 1 = 3 \cdot 43 \cdot 127$.

Esercizio 2.95. Dato un circolo $\mathcal{C}$ di centro O e raggio 1, siano AB un suo diametro, e a e b le tangenti a $\mathcal{C}$ in A e B, rispettivamente. Detti P un punto di $\mathcal{C}$ diverso da A e B, e p la tangente a $\mathcal{C}$ in P, sia α l'angolo acuto $A\widehat{O}P$. Posto allora

$$A' = p \cap a \quad \text{e} \quad B' = p \cap b$$

calcola, in funzione di α, il numero

$$\overline{AA'} \cdot \overline{BB'}\,.$$

Risposta: $\overline{AA'} \cdot \overline{BB'} = 1$ (funzione costante di α).

Esercizio 2.96. Posto

$$f(x) = x + \frac{4}{x}\,,$$

1. risolvi la disequazione $f(x) \geq 4$;
2. trova il valore minimo m che $f(x)$ assume per $x > 0$, e il punto x_1 nel quale lo assume.

Risposta: **1**. $x \in]0, +\infty[$; **2**. $m = 4$, $x_1 = 2$.

Esercizio 2.97. È dato un circolo $\mathcal{C}$ di centro O e raggio 1. $ABCD$ sia un trapezio isoscele (in particolare un quadrato) circoscritto a $\mathcal{C}$. Posto $\overline{AB} = l$,

1. calcola l'area $\mathcal{A}$ di $ABCD$ in funzione di l;

2. trova per quale configurazione di $ABCD$ la sua area a risulta minima, e il suo corrispondente valore;

3. trova i valori di l per cui l'area $\mathcal{A}$ di $ABCD$ vale $4\sqrt{2}$, precisando, per ogni valore trovato di l, se AB è base maggiore o minore di $ABCD$, e il relativo valore di $\overline{CD}$.

Risposta:

1. $\mathcal{A} = l + \dfrac{l}{4}$;

2. $ABCD$ quadrato, $\mathcal{A}_{\min} = 4$;

3. $\begin{array}{lclcl} l_1 = 2\sqrt{2} + 2 & , & AB \text{ base maggiore} & , & \overline{CD} = 2\sqrt{2} - 2 \\ l_1 = 2\sqrt{2} - 2 & , & AB \text{ base minore} & , & \overline{CD} = 2\sqrt{2} + 2 \end{array}$

Esercizio 2.98. Determina per quale valore di a il polinomio

$$p_a(x) = -ax^2 + \sqrt[3]{4}x - \sqrt[3]{4} - 1 + a$$

ha come zero il numero $-\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2}$. Per il valore trovato di a calcola l'altro zero del polinomio.

Risposta: $a = -1$; $\sqrt[3]{2}$.

Esercizio 2.99. In un piano metrico, ove l'unità di misura è di 4 lati di griglia, sono dati due segmenti di misure a e b. Costruisci, con riga e compasso, il segmento di misura ab, sia nell'ipotesi che $a, b > 1$, sia nell'ipotesi in cui è $0 < a < 1$ e $b > 1$. Costruisci poi anche il segmento di misura $1/a$, sia con $a > 1$ che con $0 < a < 1$. Infine costruisci il segmento di misura $\sqrt{a}$, sempre in entrambi i casi.

(Suggerimento: considera le proporzioni

$$ab : a = b : 1, \text{ ecc.}$$

e usa il teorema di Talete.

Esercizio 2.100. Un quadrilatero convesso di vertici successivi A, B, C, D è inscritto in una circonferenza di raggio r. Sapendo che $\overline{AB} = \overline{BC} = r$, e che l'area di $ABCD$ è $\sqrt{3}\,r^2$, calcola $\overline{CD}$ e $\overline{AD}$.

Risposta: $\overline{CD} = \overline{AD} = \sqrt{3}\,r$.

Esercizio 2.101. Un quadrilatero convesso di vertici successivi A, B, C, D è inscritto in una circonferenza di raggio r. Sapendo che $\overline{AB} = \overline{BC} = r$, e che l'area di $ABCD$ è $3\sqrt{3}\,r^2/4$, calcola $\overline{BC}$ e $\overline{AD}$.

Risposta: $\overline{BC} = r$, $\overline{AD} = 2r$.

Esercizio 2.102. Un triangolo isoscele ha i lati uguali di misura l, e il terzo lato di misura $l/2$. Determina l in modo che l'altezza relativa a uno dei lati uguali misuri $\sqrt{15}$.

Risposta: $l = 16$.

Esercizio 2.103. Determina il valore di $c \in \mathbb{R}$ in modo che il polinomio

$$p_c(x) = x^4 - cx^3 + 3x^2 + 2x + 2$$

sia divisibile per il polinomio

$$q_c(x) = x^2 + x - c\,.$$

Per il valore trovato di c, $p_c(x)$ ha qualche zero reale?

Risposta: $c = -1$; $p_{-1}(x)$ non ha zeri reali.

Esercizio 2.104. Dati tre circoli $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ di ugual raggio r e fra loro tangenti a due a due, trova i lati l ed L dei due triangoli equilateri cui tutti e tre i circoli sono, rispettivamente, internamente ed esternamente tangenti.

Risposta: $l = (4 - 2\sqrt{3})r$, $L = (2 + 2\sqrt{3})r$.

Esercizio 2.105. Per quali numeri interi relativi z accade che il numero

$$\frac{z+2}{z}$$

è ancora un numero intero relativo?.

Risposta: $z \in \{1, -1, 2, -2\}$.

Esercizio 2.106. Trova quel numero intero positivo n tale che

$$n \times 31 = 111111111111111\,.$$

Risposta: $n = 3584229390681$.

Esercizio 2.107. Risolvi la disequazione

$$\frac{\sqrt{|x^2-1|} - x + 1}{\sqrt{x^2-1} - |x|} > 0\,.$$

Risposta: $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

Esercizio 2.108. Il quadrato di un numero di 4 cifre $abcd$ è il numero

$$xyz3344\,.$$

Trova $abcd$, senza l'uso della calcolatrice.

Risposta: 1812

Esercizio 2.109. Risolvi l'equazione

$$x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right).$$

Risposta: $x \in]-1, 1]$.

Esercizio 2.110. Una piramide retta **P** ha per base un pentagono regolare e le cinque facce concorrenti nel vertice V sono triangoli equilateri Qual è l'altezza h di **P** rispetto alla base, espressa in funzione della misura l degli spigoli?.

Risposta: $h = l\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}} \simeq 0.850\, l$.

Esercizio 2.111. In un circolo di raggio r sono inscritti un trapezio isoscele con basi di misure r e $2r$ e un rettangolo avente un lato di misura r. Trova il rapporto tra l'area del trapezio e quella del rettangolo. Trova lo stesso risultato con un ragionamento puramente geometrico.

Esercizio 2.112. Un trapezio isoscele **T** è circoscritto a un circolo $\mathcal{C}$ di raggio r. La base minore di **T** misura r: trova l'area di **T**.

Suggerimento: Sia $\mathcal{C}\colon x^2+y^2 = r^2$. Verifica che la retta $p\colon 4x+3y = 5r$ è tangente a $\mathcal{C}$ e che passa per il punto $A(r/2\,, r)$: dunque p è... Sapresti ragionare senza l'uso delle coordinate?

Risposta: $\operatorname{area}(\mathbf{T}) = 5r^2$.

Esercizio 2.113. Sia $\mathcal{C}$ un circolo di raggio r. Che misure devono avere il lato corto e quello lungo di un rettangolo inscritto in $\mathcal{C}$, il quale abbia un'area che è la metà di quella del quadrato inscritto in $\mathcal{C}$?

Risposta: $\sqrt{2-\sqrt{3}}\, r$, $\sqrt{2+\sqrt{3}}\, r$.

Esercizio 2.114. Un triangolo ABC è inscritto in un circolo $\mathcal{C}$ di raggio r. Sapendo che

$$\overline{AB} = \sqrt{3}r \quad \text{e} \quad \overline{BC} = r\,,$$

trova le possibili misure del lato AC.

Risposta: $2r$ oppure r.

Esercizio 2.115. È dato un parallelogramma $ABCD$ con $\overline{AB} = l$ e l'angolo $\widehat{A}$ acuto. Detta H la proiezione del vertice C sul prolungamento del lato AB, trova la misura di AH, sapendo che il trapezio $AHCD$ ha area tripla dell'area di $ABCD$.

Risposta: $\overline{AH} = 5l$.