Università degli studi di Udine - Facoltà di Ingegneria

Matematica di base

Soluzione completa del tema del 25/01/2010

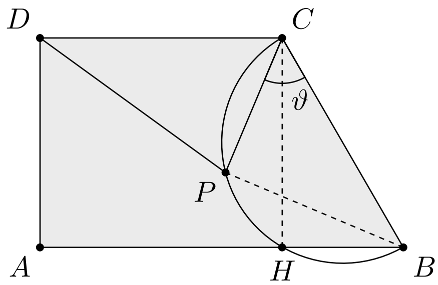
Luciano Battaia(*)

26 gennaio 2010

Questo fascicolo contiene la risoluzione dettagliata del tema di Matematica di Base, assegnato agli studenti iscritti alla Facoltà di Ingegneria dell'Università degli studi di Udine il 25 gennaio 2010. Al link http://www.batmath.it/matematica/mat_base/mat_base.htm si può trovare la raccolta di tutti i temi assegnati dal 28 settembre 2001 in poi, con soluzione breve.

Esercizio 1. Un trapezio rettangolo $ABCD$ ha la base maggiore $\overline{AB} = 3a$, la base minore $\overline{CD} = 2a$ e il lato obliquo $\overline{BC} = 2a$. Determinare l'ampiezza dell'angolo $\beta = A\hat{B}C$. Delle due circonferenze di diametro BC, considerare quella rivolta verso l'interno del trapezio, scegliere su di essa un punto P ed esprimere $\overline{CP}$ in funzione dell'angolo $\vartheta = P\hat{C}B$. Determinare infine il perimetro del triangolo PCD.

Risoluzione: Si veda la figura seguente che traduce le informazioni date dal testo.



Essendo $\overline{HB} = \overline{AB} - \overline{DC} = a$, dall'esame del triangolo rettangolo HBC si deduce subito che l'angolo $A\hat{B}C$ misura 60°, e di conseguenza l'angolo $D\hat{C}B$ misura 120°. Il triangolo PCB è retto perché inscritto in una semicirconferenza; dunque $\overline{PC} = \overline{BC}\cos\vartheta = 2a\cos\vartheta$. Per trovare $\overline{DP}$ (unico lato mancante del triangolo di cui si deve calcolare il perimetro) basta ora applicare il teorema del coseno al triangolo PCD, tenendo conto che $D\hat{C}P = 120° - \vartheta$. Si trova

$$\begin{aligned}\overline{DP} &= \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{CP}^2 - 2\cdot\overline{DC}\cdot\overline{CP}\cos(120° - \vartheta)} = \\ &= \sqrt{4a^2 + 4a^2\cos^2\vartheta - 2\cdot 2a\cdot 2a\cos\vartheta\cos(120° - \vartheta)} =\end{aligned}$$

[*] http://www.batmath.it

$$= \sqrt{4a^2 + 4a^2\cos^2\vartheta - 2\cdot 2a\cdot 2a\cos\vartheta\left(-\frac{1}{2}\cos\vartheta + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\vartheta\right)}$$

$$= \sqrt{4a^2 + 8a^2\cos^2\vartheta - 4a^2\sqrt{3}\cos\vartheta\sin\vartheta}\,.$$

Il perimetro richiesto è dunque

$$2p = 2a + 2a\cos\vartheta + \sqrt{4a^2 + 8a^2\cos^2\vartheta - 4a^2\sqrt{3}\cos\vartheta\sin\vartheta}\,.$$

Esercizio 2. Risolvere la disequazione

$$\frac{|4-x^2| - 3x}{\sqrt{x^2-3x}} > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione: Determiniamo preventivamente il dominio della funzione a primo membro. Si deve avere

$$x^2 - 3x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \vee x > 3\,.$$

A questo punto, essendo il denominatore della frazione sempre strettamente positivo, basterà risolvere la disequazione

$$|4-x^2| - 3x > 0\,.$$

Poiché

$$|4-x^2| = \begin{cases} 4-x^2, & \text{se} \quad -2 \le x \le 2 \\ -4+x^2, & \text{se} \quad x < -2 \vee x > 2 \end{cases},$$

si possono distinguere due casi.

1. Se $-2 \le x \le 2$, si ottiene

$$4 - x^2 - 3x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad -4 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad -2 \le x < 1\,.$$

2. Se $x < -2 \vee x > 2$, si ottiene

$$-4 + x^2 - 3x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -1 \vee x > 4 \quad \Rightarrow \quad x < -2 \vee x > 4$$

L'unione dei casi 1 e 2 fornisce i valori $x < 1 \vee x > 4$. Tenendo infine conto del dominio, si conclude che le soluzioni della disequazione proposta sono:

$$x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[\,.$$

Esercizio 3. Tra le parabole di equazioni $4y = 4kx - x^2$, $k \in \mathbb{R}$, determinare quelle tangenti alla retta t di equazione $y = x + 4$. Di queste considerare quella il cui vertice V ha ascissa negativa e indicare con T e Q rispettivamente il punto di contatto con la retta t e l'intersezione di questa retta con l'asse y. Calcolare l'area del triangolo TVQ.

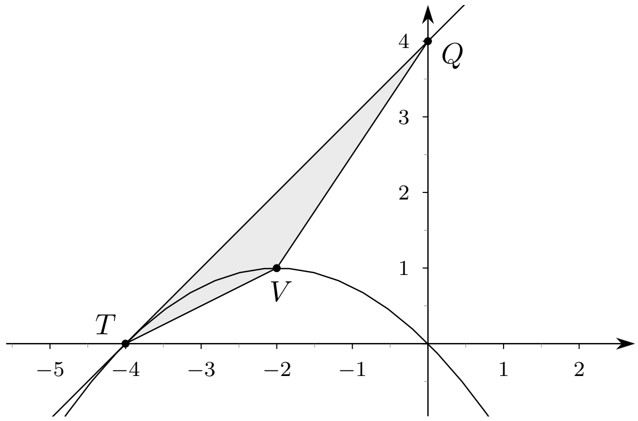
Risoluzione: La condizione di tangenza tra la retta data e la generica parabola si ottiene dalla condizione che il sistema costituito dalle due equazioni abbia una sola soluzione, ovvero che l'equazione risolvente abbia discriminante nullo.

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}x^2 + kx \\ y = x + 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4(1-k)x + 16 = 0 \Rightarrow k^2 - 2k - 3 = 0 \Rightarrow k = 3 \vee k = -1\,.$$

La parabola corrispondente a $k = 3$ ha ascissa del vertice in $x = 6$, quella corrispondente a $k = -1$ ha ascissa del vertice in $x = -2$. La parabola richiesta è dunque

$$y = -\frac{1}{4}x^2 - x\,.$$

La figura corrispondente è la seguente.



È immediato trovare il punto di tangenza, $T = (-4, 0)$, il punto $Q = (0, 4)$ e il vertice $V = (-2, 1)$. Per trovare l'area richiesta è sufficiente trovare $\overline{TQ}$ e l'altezza relativa a TQ, cioè la distanza di V dalla retta $t : x - y + 4 = 0$, cioè dalla retta data. Si ottiene

$$\overline{TQ} = \sqrt{4^2 + 4^2} = 4\sqrt{2}; \quad d(V, t) = \frac{|-2 - 1 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

L'area richiesta è allora:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\, 4\sqrt{2}\, \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$$

Esercizio 4. Determinare le condizioni su $a \in \mathbb{R}$ affinché il polinomio

$$P(x) = x^4 + (a - 1)x^2 - a$$

abbia quattro radici reali e distinte e calcolare le radici.

Risoluzione: L'esercizio può essere risolto in diversi modi. Il più elementare è, forse, il seguente. Si tratta di risolvere l'equazione

$$x^4 + (a - 1)x^2 - a = 0\,,$$

cercando le condizioni perché abbia quattro soluzioni reali e distinte. L'equazione considerata è una biquadratica. Occorrerà dunque che l'equazione di secondo grado nell'incognita t

$$t^2 + (a - 1)t - a = 0$$

abbia due radici reali, distinte e strettamente positive. Perché succeda questo occorre che il discriminante sia strettamente positivo e che i coefficienti presentino due variazioni (cosiddetta "*Regola di Cartesio*").

$$\Delta = (a - 1)^2 + 4a = a^2 + 2a + 1 = (a + 1)^2\,,$$

che è strettamente positivo per $a \neq -1$. Essendo il primo coefficiente del trinomio positivo, si avranno due variazioni se $a - 1 < 0 \wedge -a > 0$, cioè se $a < 0$. Tenendo conto della condizione sul discriminante si conclude che il polinomio proposto ha quattro radici reali e distinte se

$$a \in]-\infty, -1 \cup]-1, 0[\,.$$

Le radici richieste sono

$$x_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{1 - a \pm \sqrt{(a + 1)^2}}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - a \pm |a + 1|}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - a \pm (a + 1)}{2}}\,,$$

dove abbiamo tenuto conto del fatto che la presenza del doppio segno $\pm$ davanti al valore assoluto rende inutile il valore assoluto stesso. Semplificando, si trovano le radici:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -\sqrt{-a},\ x_4 = \sqrt{a}\,.$$

Un modo decisamente più elegante di procedere poteva essere il seguente. Il polinomio

$$t^2 + (a-1)t - a = t^2 - (1-a)t - a$$

si può scomporre ("*regola di somma e prodotto:* $t^2 - st + p$") in

$$(t-1)(t+a)\,.$$

Dunque il polinomio dato si scompone in

$$(x^2-1)(x^2+a)\,,$$

e ora la conclusione trovata sopra è immediata, come pure il calcolo delle radici.

Esercizio 5. Fra tutte le rette passanti per il punto $A = (1, 2)$ determinare quella, o quelle, che nel primo quadrante formano con gli assi coordinati un triangolo di area pari a 4.

Risoluzione: La soluzione più semplice consiste nel cercare l'equazione segmentaria della retta incognita, tenendo conto che sicuramente essa non passerà per l'origine:

$\dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q} = 1\,,\ p > 0 \wedge q > 0$ (perché il testo chiede un triangolo appartenente al primo quadrante).

La condizione di passaggio per $A = (1, 2)$ e la richiesta che l'area del triangolo sia 4 consentono di scrivere il seguente sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{p} + \dfrac{2}{q} = 1 \\ \dfrac{pq}{2} = 4 \end{cases} ,$$

sistema che ha come soluzione possibile $(p, q) = (2, 4)$.

Esercizio 6. Risolvere la disequazione

$$x^4 + x^2 - 18|x| + 16 \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione: Conviene preventivamente osservare che il primo membro è simmetrico in x, dunque basterà risolvere la disequazione proposta per $x \geq 0$, ottenendo

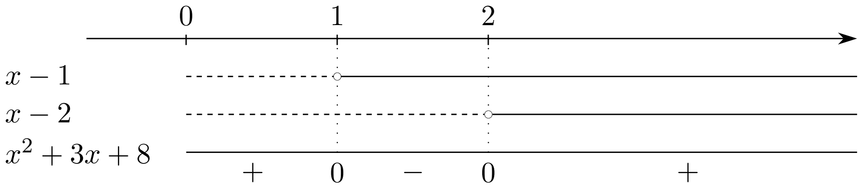
$$p(x) = x^4 + x^2 - 18x + 16 \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

È immediato verificare[1] che il polinomio p ha le radici 1 e 2. Eseguendo la divisione tra il polinomio p e $x-1$ e poi tra il quoziente e $x-2$ si trova la seguente scomposizione:

$$p(x) = x^4 + x^2 - 18x + 16 = (x-1)(x-2)(x^2+3x+8)\,.$$

L'ultimo fattore è positivo, da cui si deduce che, per $x \geq 0$, il polinomio ha il seguente segno:

[1] Le eventuali radici razionali del polinomio p sono ± 1, ± 2, ± 4, ± 8, ± 16, valori ottenuti con la solita regola che riguarda i divisori del termine noto e del primo coefficiente.

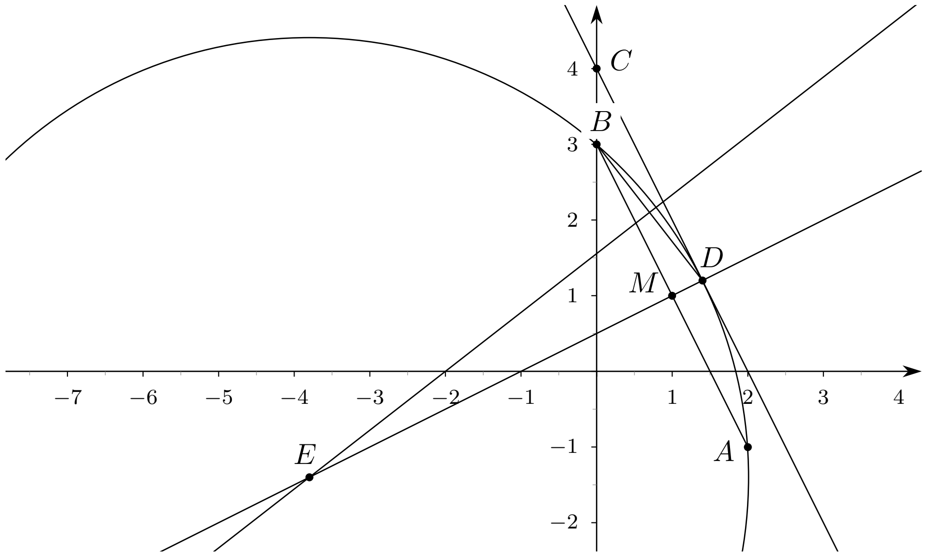


Se si tiene conto della già citata simmetria, l'insieme delle soluzioni della disequazione proposta è

$$]-\infty,-2] \cup [-1,1] \cup [2,+\infty[\,.$$

Esercizio 7. Scrivere l'equazione dell'asse del segmento di estremi $A=(2,-1)$ e $B=(0,3)$. Tra le circonferenze passanti per A e B, determinare quella tangente alla retta r passante per il punto $C=(0,4)$ e parallela ad AB.

Risoluzione: La figura seguente illustra la situazione e la soluzione grafica del problema.



Il punto medio M del segmento AB ha coordinate

$$\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,,\,\frac{y_A+y_B}{2}\right)=(1,1)\,.$$

Il coefficiente angolare della retta AB è

$$m_{AB}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{3-(-1)}{0-2}=-2\,.$$

L'asse richiesta avrà dunque coefficiente angolare $m={}^1\!/_2$ ed equazione

$$y-1=\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow y=\frac{1}{2}\,x+\frac{1}{2}\,.$$

La retta per C e parallela ad AB ha equazione

$$y-4=-2(x-0)\Rightarrow y=-2x+4\,.$$

La circonferenza richiesta, dovendo essere tangente ad r e passante per A e B, avrà come punto di tangenza l'intersezione D tra la retta r e l'asse di AB:

$$D\colon\begin{cases} y=-2x+4 \\[2ex] y=\dfrac{1}{2}\,x+\dfrac{1}{2}\end{cases} \quad\Rightarrow\quad D=\left(\frac{7}{5}\,,\,\frac{6}{5}\right)\,.$$

Per scrivere l'equazione della circonferenza si può, data l'equazione generica $x^2+y^2+ax+by+c=0$ imporre il passaggio per i tre punti A, B, D, ottenendo un sistema lineare nelle incognite a, b, c:

$$\begin{cases} 4+1+2a-b+c=0 \\ 9+3b+c=0 \\ \dfrac{49}{25}+\dfrac{36}{25}+\dfrac{7}{5}a+\dfrac{6}{5}b+c=0 \end{cases}.$$

Alternativamente si può trovare il centro E come intersezione tra l'asse del segmento BD e l'asse del segmento AB, e poi il raggio come distanza tra E e B. Si trova (con qualche calcolo standard):

$$\text{asse di } BD\colon\ y=\frac{7}{9}x+\frac{14}{9}\,; \quad E=\left(-\frac{19}{5},-\frac{7}{5}\right)\,; \quad \overline{EB}^2=\frac{169}{5}\,.$$

L'equazione richiesta è dunque

$$\left(x+\frac{19}{5}\right)^2+\left(y+\frac{7}{5}\right)^2=\frac{169}{5}\,.$$

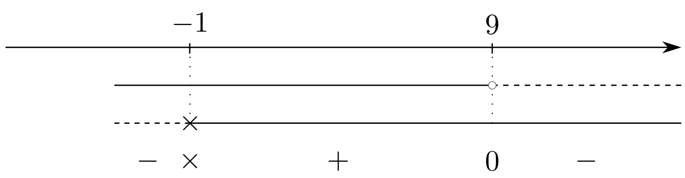
Esercizio 8. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{\frac{9-x}{x+1}}<x-3, \quad x\in\mathbb{R}.$$

Risoluzione: Il dominio comune dei due membri della disequazione si trova dalla condizione

$$\frac{9-x}{x+1}\geq 0\,, \quad \Rightarrow \quad -1<x\leq 9\,,$$

come mostra il grafico che segue.



A questo punto si può osservare che se $x<3$ la disequazione non può essere verificata, se $x\geq 3$, trattandosi di disuguaglianza tra numeri positivi, si può elevare al quadrato, e si ottiene:

$$\frac{9-x}{x+1}<(x-3)^2\,.$$

Si può ridurre allo stesso denominatore ed eliminare il denominatore (in quanto esso è strettamente positivo se $x\geq 3$); dopo semplificazione si ottiene:

$$x(x^2-5x+4)>0\Rightarrow x^2-5x+4>0 \text{ (x è strettamente positivo perché $x\geq 3$).}$$

Sempre tenendo conto che $x\geq 3$ e del dominio, si conclude che l'insieme delle soluzioni della disequazione è

$$]4,9]\,.$$

Esercizio 9. La base AB di un triangolo isoscele misura $8a$ e $\cos\alpha={}^1\!/_4$, essendo $\alpha=C\hat{A}B$. Calcolare il perimetro e l'area del triangolo e la misura del raggio del cerchio inscritto.

Risoluzione: Detto H il punto medio della base AB, dall'esame del triangolo rettangolo AHC si deduce

$$\overline{AH} = \overline{AC}\cos\alpha \ \Rightarrow\ \overline{AC} = \frac{\overline{AH}}{\cos\alpha} = \frac{4a}{1/4} = 16a\,.$$

Si può ora ricavare la misura dell'altezza CH, per esempio con il teorema di Pitagora applicato al triangolo AHC e si ottiene

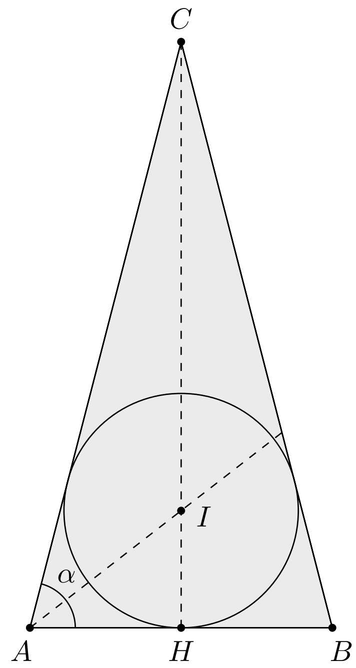
$$\overline{CH} = \sqrt{(16a)^2 - (4a)^2} = 4a\sqrt{15}\,.$$

Per la misura dell'area e del perimetro si ottiene:

$$\mathcal{S} = 16a^2\sqrt{15} \qquad 2p = 40a\,.$$

Il raggio del cerchio inscritto è ora immediato:

$$r = \frac{\mathcal{S}}{p} = \frac{16a^2\sqrt{15}}{20a} = \frac{4}{5}\,a\sqrt{15}\,.$$



Chi non ricordasse la formula del raggio del cerchio inscritto potrebbe ricavare r utilizzando il triangolo rettangolo AIH:

$$r = \overline{IH} = \overline{AH}\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}\,.$$

Essendo

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3}{8}}\,,\qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{5}{8}}\,,$$

si ottiene

$$\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{3}{5}}\,,$$

e infine

$$r = \frac{4}{5}\,a\sqrt{15}\,,$$

in perfetto accordo con il risultato precedente.

Esercizio 10. Risolvere la disequazione

$$2\sqrt{3}\sin^2 x + \cos x \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Risoluzione: Posto $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, la disequazione si riscrive come segue:

$$2\sqrt{3}\cos^2 x - \cos x - 2\sqrt{3} \geq 0\,.$$

Posto ora $\cos x = t$ si ottiene

$$2\sqrt{3}\,t^2 - t - 2\sqrt{3} \geq 0\,,$$

la cui equazione associata

$$2\sqrt{3}\,t^2 - t - 2\sqrt{3} = 0$$

fornisce le soluzioni

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{4\sqrt{3}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

Dunque

$$t < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee t > \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2} \vee \cos x > \frac{2}{\sqrt{3}}\,.$$

La seconda disequazione non è mai verificata ($2/\sqrt{3} > 1$), dalla prima si trae

$$x \in \left[\frac{5\pi}{6} + 2k\pi\,, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi\right], \quad k \in \mathbb{Z}\,.$$