Università degli studi di Udine - Facoltà di Ingegneria

Matematica di base

Soluzione completa del tema del 3/10/2008

Luciano Battaia(*)

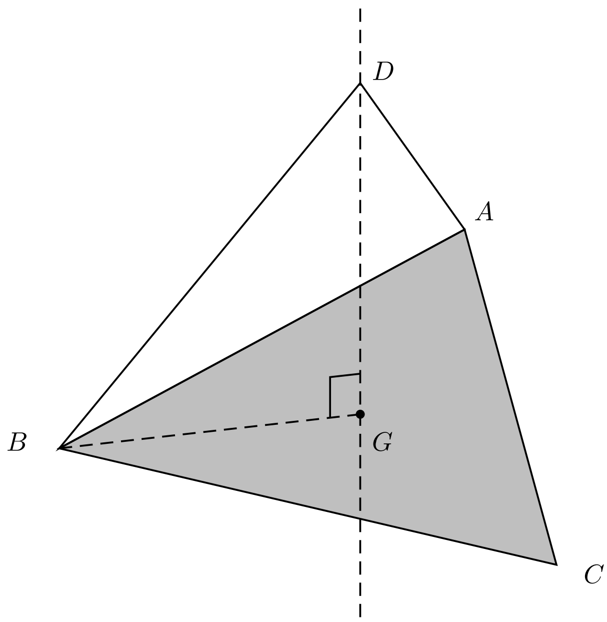
26 gennaio 2010

Questo fascicolo contiene la risoluzione dettagliata del tema di Matematica di Base, assegnato agli studenti iscritti alla Facoltà di Ingegneria dell'Università degli studi di Udine il 3 ottobre 2008. Al link http://www.batmath.it/matematica/mat_base/mat_base.htm si può trovare la raccolta di tutti i temi assegnati dal 28 settembre 2001 in poi, con soluzione breve.

Esercizio 1. È dato un triangolo equilatero ABC di lato l in un piano α. Detto G il suo baricentro, sia d la retta per G ortogonale ad α. Calcolare

1. a che distanza da α deve trovarsi un punto $D \in d$ perché il triangolo ABD sia anch'esso equilatero;
2. la distanza di C da D.

Risoluzione:



*http://www.batmath.it

La soluzione del problema è immediata se si osserva la figura e si tiene conto che il triangolo BGC deve essere retto in G, con $BD = l$, mentre BG deve essere i due terzi dell'altezza del triangolo. Si trovano facilmente i seguenti valori:
a) $d = \sqrt{2/3}\, l$; b) $\overline{CD} = l$.

Esercizio 2. Trovare le soluzioni dell'equazione

$$\cos^2 x + (1-\sqrt{3})\cos x \sin x - \sqrt{3}\sin^2 x = 0$$

che appartengono all'intervallo $[-\pi/2, 3\pi/2]$.

Risoluzione: Poiché $\cos x = 0$ non è soluzione di questa equazione, si può dividere per $\cos x$, ottenendo la seguente equazione nella funzione tangente:

$$\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\, x - (1-\sqrt{3})\,\mathrm{tg}\, x - 1 = 0\,.$$

Posto $\mathrm{tg}\, x = t$, si ottiene un'equazione di secondo grado che ha le soluzioni:

$$\begin{aligned} t_{1,2} &= \frac{(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1-\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1-2\sqrt{3}+3) + 4\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}} = \\ &= \frac{(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{1+2\sqrt{3}+3}}{2\sqrt{3}} = \frac{(1-\sqrt{3}) \pm \sqrt{(1+\sqrt{3})^2}}{2\sqrt{3}} = \\ &= \frac{(1-\sqrt{3}) \pm (1+\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \begin{cases} 1/\sqrt{3} \\ -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

A questo punto è immediato concludere che le soluzioni, nell'intervallo richiesto, sono:

$$x \in \left\{ -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6} \right\}.$$

Si sarebbe anche potuto procedere usando le formule di duplicazione e bisezione:

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}\,, \quad \sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}\,, \quad \sin x \cos x = \frac{sin2x}{2}\,,$$

ottenendo l'equazione

$$(1-\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})\sin 2x + (1+\sqrt{3})\cos 2x = 0\,,$$

che può essere semplificata in

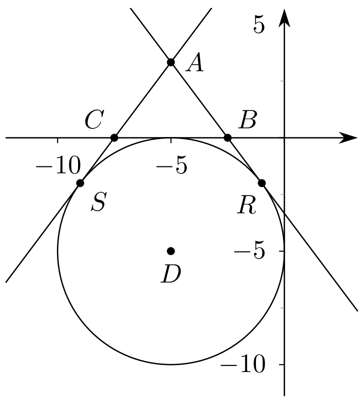
$$\sin 2x - (2+\sqrt{3})\cos 2x + 1 = 0\,.$$

Si tratta di un'equazione lineare in seno e coseno, nella variabile $2x$ che può essere risolta con metodo grafico (porre $\cos 2x = X$ e $\sin 2x = Y$ e mettere a sistema con $X^2 + Y^2 = 1$).

Nelle equazioni omogenee di secondo grado in seno e coseno, come quella proposta in questo quesito, si può sempre procedere indifferentemente nei due modi descritti; il secondo presenta il vantaggio che "funziona senza condizioni", cioè senza dovere preventivamente verificare se $\cos x = 0$ è o no soluzione dell'equazione. Naturalmente i calcoli possono essere più complicati con un metodo rispetto all'altro, ma la cosa non è prevedibile a priori.

Esercizio 3. Data la circonferenza γ di equazione $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$, scrivere le equazioni delle rette r ed s tangenti a γ nei punti R ed S di ordinata -2. Calcolare il perimetro del triangolo formato da r, s e l'asse x.

Risoluzione:



Le coordinate dei punti R ed S si trovano facilmente (intersecando $y = -2$ con la circonferenza data); le equazioni delle tangenti sono anch'esse immediate (basta osservare che passano per i punti R ed S e sono ortogonali, rispettivamente, alle rette DR e DS). Si trova subito che il perimetro richiesto vale $^{40}/_{3}$.

Esercizio 4. Trovare 3 numeri reali a, b e c tali che per ogni $x \in \mathbb{R}$ valga la seguente identità

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + ax + c)(x^2 + bx + c)\,.$$

Il polinomio a primo membro ammette radici reali?

Risoluzione: Si tratta di un quesito estremamente interessante: il polinomio che compare a primo membro non è facilmente scomponibile in termini elementari in quanto è di quarto grado e non ha, come vedremo, radici reali, in particolare non ne ha di razionali come si può constatare immediatamente (le uniche ammissibili sarebbero ± 1 che non vanno bene). Ricordiamo che questo polinomio compare nella scomposizione di $x^5 - 1$:

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)\,.$$

Per risolvere il quesito basta eseguire la moltiplicazione dei due polinomi a secondo membro e poi uguagliare i coefficienti dei polinomi a primo e secondo membro (principio di identità dei polinomi); si ottiene:

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ ab + 2c = 1 \\ ac + bc = 1 \\ c^2 = 1 \end{cases}\,.$$

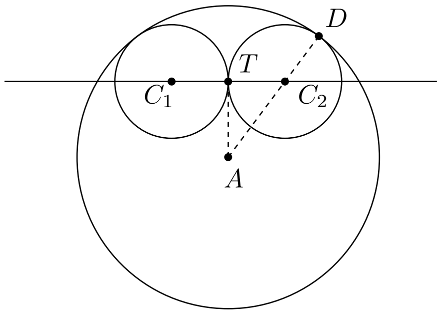
La risoluzione di questo sistema porta ai seguenti valori:

$$a = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\ b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ c = 1\ \vee a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\,,\ b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\,,\ c = 1\,.$$

La simmetria tra a e b era naturalmente prevedibile visto il tipo di scomposizione richiesto. A questo punto è facile concludere che il polinomio non ha radici reali, in quanto non ne hanno i due fattori di secondo grado in cui il polinomio è stato scomposto.

Esercizio 5. Internamente tangenti a un cerchio $\mathcal{C}$ di centro O e raggio R vi sono due cerchi $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ di raggio r, i quali sono pure tangenti tra loro. Quanto vale il rapporto r/R se la retta dei centri di $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$ dista $R/2$ da O?

Risoluzione:



Il problema si può risolvere facilmente osservando che $\overline{AT} = R/2$ (dato del problema), $\overline{TC_2} = r$, $\overline{AC_2} = R - r$ (per la condizione di tangenza tra due cerchi, la retta AC_2 deve passare per il punto di tangenza). Nel triangolo ATC_2 si ottiene allora

$$\overline{AT}^2 + \overline{TC}_2^2 = \overline{AC}_2^2 .$$

Da qui si ottiene subito

$$\frac{r}{R} = \frac{3}{8}.$$

Esercizio 6. Risolvere la disequazione

$$\sqrt{4 - |x|} \leq \sqrt{-x^2 + 7x - 6}$$

con $x \in \mathbb{R}$.

Risoluzione: La determinazione del dominio dei due membri conduce a

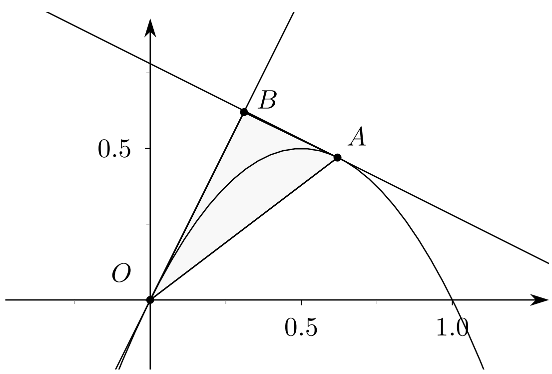
$$\begin{cases} 4 - |x| \geq 0 \\ -x^2 + 7x - 6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ 1 \leq x \leq 6 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq x \leq 4 .$$

A questo punto si può eliminare il valore assoluto sulla x (perché la x risulta sempre positiva nel dominio) ed elevare al quadrato (si tratta di una disuguaglianza tra numeri positivi); si ottiene una semplice disequazione di secondo grado. tenendo conto del dominio le soluzioni sono:

$$x \in [4 - \sqrt{6}\,,\, 4].$$

Esercizio 7. La parabola $\mathcal{P}$ ha equazione $y = 2x(1 - x)$. Calcolare l'area del triangolo formato dalla retta r tangente a $\mathcal{P}$ nell'origine O, dalla retta s ortogonale ad r e tangente a $\mathcal{P}$ in un punto A, e dal segmento OA.

Risoluzione:



La retta tangente in O alla parabola ha equazione $y = 2x$ e si può determinare con il metodo del "delta= 0" oppure ricordando che il coefficiente angolare della tangente a un parabola $y = ax^2 + bx + c$ in un punto suo di ascissa x_0 è dato da $m = 2ax_0 + b$. Le rette per perpendicolari a questa tangente hanno dunque coefficiente angolare $-1/2$. La tangente richiesta sarà dunque del tipo

$$y = -\frac{1}{2}x + q\,.$$

La determinazione di q si fa imponendo la condizione di tangenza (sistema con la parabola e $\Delta = 0$). Si ottiene $q = 25/32$. A questo punto la determinazione delle coordinate di A e di B e, di conseguenza, il calcolo dell'area del triangolo sono immediati. Si ottiene:

$$\text{area } = \frac{125}{1024}\,.$$

Esercizio 8. Risolvere in $\mathbb{R}$ la disequazione

$$\frac{4+x}{|5-2x|} < 1\,.$$

Risoluzione: Trovato il dominio ($x \neq 5/2$), la disequazione si può scrivere nella forma

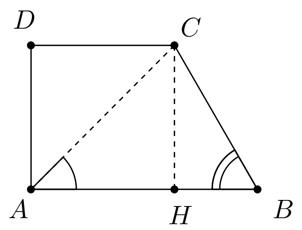
$$4 + x < |5 - 2x|\,,$$

in quanto si possono moltiplicare ambo i membri per $|5 - 2x|$ che risulta (nel dominio) una quantità strettamente positiva. Distinguendo i due casi possibili per il valore assoluto si ottiene subito la soluzione:

$$x \in \left]-\infty, \frac{1}{3}\right[\cup \left]9, +\infty\right[\,.$$

Esercizio 9. Calcolare l'area del trapezio $ABCD$ sapendo che $\overline{AB} = 3a$, che gli angoli in A e D sono retti, che $A\hat{B}C = \pi/3$ e che $\cos B\hat{A}C = 1/\sqrt{2}$.

Risoluzione:



L'angolo $B\hat{A}C$ misura chiaramente $\pi/4$ e quindi l'angolo $A\hat{C}B$ $5\pi/12$. Si può applicare il teorema dei seni al triangolo ABC per determinare $\overline{CB}$ e successivamente trovare $\overline{CH} = \overline{AD} = \overline{DC}$ nel triangolo rettangolo CHB. Si ottiene, seppure con un po' di fatica nei calcoli, il seguente valore per l'area:

$$\frac{162 - 72\sqrt{3}}{8}\, a^2 \simeq 4.662a^2.$$

Esercizio 10. Risolvere la disequazione

$$\frac{|\cos 2x|}{\sin x} < 1$$

per $x \in [0, 7\pi/2]$.

Risoluzione: Conviene trasformare il $\cos 2x$: $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$. A questo punto si considerano due casi, a seconda che l'argomento del valore assoluto sia positivo o negativo ottenendo le seguenti disequazioni

$$\frac{1-2\sin^2 x-\sin x}{\sin x}<0 \quad , \quad \frac{2\sin^2 x-1-\sin x}{\sin x}<0\,,$$

la prima nel caso che l'argomento del valore assoluto sia positivo, la seconda nel caso che sia negativo. Si tratta di due disequazioni di tipo standard che conviene risolvere preventivamente nell'intervallo $[0, 2\pi]$, per poi riportare i risultati nell'intervallo richiesto. Si ottiene:

$$x \in \left]\frac{\pi}{6}\,,\,\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\pi\,,\,2\pi\right[\cup \left]\frac{11\pi}{6}\,,\,\frac{5\pi}{2}\right[\cup \left]3\pi\,,\,\frac{7\pi}{2}\right[\,.$$