

Matematica per l'eccellenza, Esercizio 1.8

Materiale prelevato da

<http://www.batmath.it/matematica/eccell/es1/es1.htm>

Versione del 23 marzo 2010

Testo

Trovare tutte le soluzioni intere positive di

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{10}.$$

(Esercizio assegnato al tema di ammissione alla Scuola Superiore dell'Università degli Studi di Udine, A.A.2004 – 2005.)

Soluzione

L'equazione data si può riscrivere nella forma

$$10x + 10y = xy,$$

ovvero

$$xy - 10y - 10x = 0 \quad \Rightarrow \quad xy - 10y - 10x + 100 = 100 \quad \Rightarrow \quad (x - 10)(y - 10) = 100.$$

Basta ora scrivere 100 in tutti i modi possibili come prodotto di due interi ($1 \cdot 100$, $2 \cdot 50$, ecc.), e successivamente impostare i sistemi di equazioni corrispondenti, per trovare tutte le coppie-soluzione. Per esempio si trova

$$\begin{cases} x - 10 = 1 \\ y - 10 = 100 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = 11 \\ y = 110 \end{cases}.$$

Si ottengono le seguenti coppie:

$$(11, 110), (12, 60), (14, 35), (15, 30), (20, 20),$$

e naturalmente le simmetriche.