Matematica per l'eccellenza, Esercizio 1.7

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/matematica/eccell/es1/es1.htm

Versione del 23 marzo 2010

Testo

Trovare tutte le soluzioni intere positive di

$$x^y = y^x\,,$$

ovviamente con $x \neq y$.

(Esercizio assegnato alle Olimpiadi di Matematica dell'USSR.)

Soluzione

Scriviamo le decomposizioni di x e y in fattori primi:

$$x = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad y = q_1^{\beta_1} \dots q_h^{\beta_h}.$$

Da $x^y = y^x$ si deduce che

$$\left(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}\right)^{q_1^{\beta_1} \dots q_h^{\beta_h}} = \left(q_1^{\beta_1} \dots q_h^{\beta_h}\right)^{p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}}\,,$$

da cui si trova, intanto, che i fattori primi di x e y devono essere uguali (non necessariamente gli esponenti dei fattori):

$$x = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}, \quad y = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}.$$

Di nuovo da $x^y = y^x$ si deduce che

$$\left(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}\right)^y = \left(p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k}\right)^x,$$

ovvero

$$\alpha_1 y = \beta_1 x,\ \dots,\ \alpha_k y = \beta_k x\,.$$

Possiamo supporre $y > x$ ($y < x$ è semplicemente il caso simmetrico); allora:

$$y = \frac{\beta_1}{\alpha_1}\,x\,,$$

da cui $\beta_1 > \alpha_1$ e, analogamente, $\beta_k > \alpha_k$, ovvero $\beta_1 = \alpha_1 + \gamma_1,\ \dots,\ \beta_k = \alpha_k + \gamma_k$. Da qui si trova

$$y = p_1^{\beta_1} \dots p_k^{\beta_k} = p_1^{\alpha_1+\gamma_1} \dots p_k^{\alpha_k+\gamma_k} = \left(p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}\right)\left(p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k}\right) = x\left(p_1^{\gamma_1} \dots p_k^{\gamma_k}\right) = mx\,,$$

cioé y è multiplo di x (con $m > 1$). L'equazione data diventa

$$x^{mx} = (mx)^x \,,$$

ovvero

$$x^m = mx \quad \Rightarrow \quad x^{m-1} = m \,.$$

Da qui si deduce subito che, se $m = 2$, $x = 2$ e $y = 4$, che fornisce la soluzione universalmente nota del problema posto. Se $m > 2$, x deve essere ≥ 2 (x è intero!), da cui

$$x^{m-1} \geq 2^{m-1} \,,$$

ed è facile controllare[1] che

$$2^{m-1} > m \,,$$

da cui

$$x^{m-1} \geq 2^{m-1} > m, \quad (m > 2) \,.$$

Quindi l'unica soluzione è quella trovata, $x = 2$ e $y = 4$ (e naturalmente la simmetrica $y = 2$ e $x = 4$).

È interessante osservare che di soluzioni razionali dell'equazione proposta ce ne sono invece infinite, anche se trovarle tutte è più difficile (e faceva parte del problema assegnato all'olimpiade USSR, per i finalisti). Una soluzione è, ad esempio,

$$x = \frac{9}{4} \,, \quad y = \frac{27}{8} \,.$$

[1] Lo si può provare rigorosamente per induzione, oppure tenendo conto delle note proprietà della funzione esponenziale di base 2.