Matematica per l'eccellenza, Esercizio 1.6

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/matematica/eccell/es1/es1.htm

Versione del 23 marzo 2010

Testo

Trovare tutte le soluzioni intere di

$$(3x^2 + y^2 - 4y - 17)^3 - (2x^2 + 2y^2 - 4y - 6)^3 = (x^2 - y^2 - 11)^3 .$$

(Esercizio prelevato da: USA Mathematical Talent Search, Round 1 - Year 16 - Academic Year 2004 – 2005.)

Soluzione

Posto

$$A = 3x^2 + y^2 - 4y - 17, \quad B = 2x^2 + 2y^2 - 4y - 6, \quad C = x^2 - y^2 - 11 ,$$

si verifica subito che $A - B = C$. L'equazione proposta diventa allora

$$A^3 - B^3 = (A - B)^3 ,$$

che, semplificata, porge

$$3AB(A - B) = 0 .$$

Da qui si deduce che deve essere

$$A = 0 \vee B = 0 \vee A = B .$$

Dalla prima si trova $3x^2 + y^2 - 4y - 17 = 0$. Dal solito completamento dei quadrati si ottiene

$$3x^2 + (y - 2)^2 = 21 .$$

Poiché 21 e $3x^2$ sono multipli di 3, anche $y - 2$ lo deve essere: le uniche possibilità sono $y - 2 = 0$ e $y - 2 = \pm 3$, da cui $y \in \{ -1, 2, 5 \}$. Se $y = 2$, x non può essere intero; se $y = 5$ oppure $y = -1$ si trova facilmente $x = \pm 2$.

Il caso $B = 0$ si tratta quasi allo stesso modo:

$$2x^2 + 2y^2 - 4y - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^+(y - 1)^2 = 4 ,$$

da cui trova facilmente $x^2 = 0 \wedge (y - 1)^2 = 4$, oppure $x^2 = 4 \wedge (y - 1)^2 = 0$. Questo permette di concludere.

Il caso $A = B$ porge $x^2 - y^2 = 11$, da cui $(x - y)(x + y) = 11$ e, tenendo conto che 11 è primo,

$$(x - y = \pm 1 \wedge x + y = 11) \vee (x - y = \pm 11 \wedge x + y = 1) ,$$

e anche ora le conclusioni sono facili.

Riepilogando, si hanno le seguenti coppie-soluzione

$$\{\,(2,-1),(-2,-1),(2,5),(-2,5),(0,-1),(0,3),(-2,1),(2,1),(-6,-5),(-6,5),(6,-5),(6,5)\,\}\,.$$