

Matematica per l'eccellenza, Esercizio 1.5

Materiale prelevato da

<http://www.batmath.it/matematica/eccell/es1/es1.htm>

Versione del 23 marzo 2010

Testo

Trovare, lavorando nell'insieme dei numeri reali, le soluzioni di

$$\frac{36}{\sqrt{x}} + \frac{9}{\sqrt{y}} = 42 - 9\sqrt{x} - \sqrt{y}.$$

(Esercizio prelevato da: USA Mathematical Talent Search, Round 4 - Year 14 - Academic Year 2002 – 2003.)

Soluzione

Intanto, ovviamente, $x > 0$ e $y > 0$. Poniamo $\sqrt{x} = t$ e $\sqrt{y} = u$, e trasportiamo t a sinistra e u a destra, ottenendo

$$\frac{9}{t}(4 + t^2) = -\frac{1}{u}(u^2 - 42u + 9).$$

Completiamo i quadrati entro le parentesi tonde (si tratta di una tecnica spesso utile in moltissimi problemi).

$$\frac{9}{t}(t^2 - 4t + 4 + 4t) = -\frac{1}{u}(u^2 - 6u + 9 + 36u) \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{t}(t - 2)^2 + 36 = -\frac{1}{u}(u - 3)^2 + 36,$$

ovvero

$$\frac{9}{t}(t - 2)^2 = -\frac{1}{u}(u - 3)^2.$$

Poiché il primo membro è ≥ 0 , mentre il secondo membro è ≤ 0 , si trova subito che deve essere $t = 2$ e $u = 3$, da cui

$$x = 4 \quad \text{e} \quad y = 9.$$