Matematica per l'eccellenza, Esercizio 1.4

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/matematica/eccell/es1/es1.htm

Versione del 23 marzo 2010

Testo

Trovare gli interi a, b, c, d, e tali che

$$(x^2 + ax + b)(x^3 + cx^2 + dx + e) = x^5 - 9x - 27\,.$$

(Esercizio prelevato da: USA Mathematical Talent Search, Round 1 - Year 12 - Academic Year $2000 - 2001$.)

Soluzione

Se svolgiamo i calcoli indicati al primo membro, ordiniamo e applichiamo il principio di identità dei polinomi, otteniamo il seguente sistema di equazioni nelle incognite a, b, c, d, e (intere!):

$$\begin{cases} a + c = 0 \\ ac + b + d = 0 \\ ad + bc + e = 0 \\ ae + bd = -9 \\ be = -27 \end{cases}$$

La prima equazione fornisce subito $a = -c$, mentre dall'ultima, tenendo conto che cerchiamo solo soluzioni intere, troviamo per la coppia (b, e) le seguenti possibilità:

$$(b, e) \in \{\, (1, -27),\ (-1, 27),\ (27, -1),\ (-27, 1),\ (3, -9),\ (-3, 9),\ (9, -3),\ (-9, 3) \,\}\,.$$

Le equazioni 2, 3, 4 si possono riscrivere

$$\begin{cases} -c^2 + b + d = 0 \\ -cd + bc + e = 0 \\ -ce + bd = -9 \end{cases} :$$

si tratta di un sistema (di 8° grado) in cui restano come incognite solo i numeri c e d, visto che b ed e devono avere i valori già trovati. Non resta altro da fare che tentare una risoluzione con l'ordinario metodo di sostituzione. Ricaviamo per esempio d dalla prima equazione e sostituiamo nella seconda e terza:

$$\begin{cases} d = c^2 - b \\ -c^3 + bc + e = 0 \\ -ce + bc^2 - b^2 = -9 \end{cases} .$$

Poiché la seconda equazione è di terzo grado in c la scartiamo e ci concentriamo sulla terza, ordinando e usando la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado (osservando anche b non può essere 0).

$$c^2b - ce + 9 - b^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{e \pm \sqrt{e^2 - 4b(9 - b^2)}}{2b}\,.$$

Poiché il radicando deve essere un quadrato perfetto, in quanto cerchiamo solo soluzioni intere, deduciamo che le uniche coppie (b, e), tra quelle trovate, che vanno bene sono $(9, -3)$ e $(3, -9)$. La prima ci fornisce come valore intero per c solo il numero -3, la seconda i numeri 0 e di nuovo -3. Il valore $c = 0$ non soddisfa alla seconda delle tre equazioni, in quanto fornisce $e = 0$. Dunque l'unico valori possibile per c è -3.

Abbiamo ottenuto per la terna (b, c, e) due possibili valori: $(9, -3, -3)$ e $(3, -3, -9)$. Si vede ora facilmente che solo la seconda terna fornisce soluzioni accettabili e si trova la seguente cinquina:

$$(a, b, c, d, e) = (3, 3. -3, 6, -9)\,.$$

Il procedimento seguito assicura l'unicità della soluzione trovata.

Commento: mi pare un problema molto interessante, in quanto mostra che, come spesso succede con le equazioni in cui si cercano soluzioni intere, non bisogna spaventarsi se "si è costretti a sporcarsi le mani" con i calcoli.