Matematica per l'eccellenza, Esercizio 1.3

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/matematica/eccell/es1/es1.htm

Versione del 23 marzo 2010

Testo

Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi tale che $p(a_i) = 5$ per quattro valori interi distinti a_1, a_2, a_3, a_4. Provare che per nessun intero n può essere $p(n) = 16$.

(Esercizio prelevato da: Poloni, F., *Barbatrucchi per il problem-solving*.)

Soluzione

Poiché $p(a_1) = 5$, dal solito Teorema di Ruffini possiamo dedurre che

$$p(x) = (x - a_1)q_1(x) + 5\,.$$

Da qui deduciamo che

$$p(a_2) = (a_2 - a_1)q_1(a_2) + 5\,,$$

ma $p(a_2) = 5$: ne segue che $(a_2 - a_1)q_1(a_2) = 0$, cioè che a_2 è una radice di $q_1(x)$, visto che $a_2 - a_1 \neq 0$ perché i quattro interi dati sono distinti. Dunque

$$q_1(x) = (x - a_2)q_2(x)\,,$$

e quindi

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2)q_2(x) + 5\,.$$

Ragionando allo stesso modo con a_3 e a_4 ne concludiamo che

$$p(x) = (x - a_1)(x - a_2)(x - a_3)(x - a_4)q_4(x) + 5\,.$$

Se ora fosse $p(n) = 16$ per qualche intero n si avrebbe

$$p(n) = 16 = (n - a_1)(n - a_2)(n - a_3)(n - a_4)q_4(n) + 5\,,$$

da cui

$$(n - a_1)(n - a_2)(n - a_3)(n - a_4)q_4(n) = 11\,.$$

Se teniamo conto che $q_4(x)$, così come $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$, è a coefficienti interi, l'uguaglianza precedente implicherebbe che il numero 11 è scomponibile nel prodotto di 5 interi, di cui almeno 4 distinti, cosa palesemente impossibile, visto che 11 è un primo.