Matematica per l'eccellenza, Esercizio 1.2

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/matematica/eccell/es1/es1.htm

Versione del 5 marzo 2010

Testo

Trovare un polinomio $p(x)$, a coefficienti interi, che sia divisibile per x^2+1 e tale che $p(x)+1$ sia divisibile per x^3+x^2+1.

Soluzione

Le ipotesi implicano che esistono due polinomi, $s(x)$ e $t(x)$ tali che

$$\begin{aligned} p(x) &= (x^2+1)s(x)\,, \\ p(x)+1 &= (x^3+x^2+1)t(x)\,. \end{aligned}$$

Sottraendo dalla seconda di queste due uguaglianze la prima si ottiene

$$(x^3+x^2+1)t(x)-(x^2+1)s(x)=1\,.$$

I due polinomi x^3+x^2+1 e x^2+1 sono chiaramente primi tra di loro, per cui 1 è il loro M.C.D., e allora la formula appena scritta è un'identità di Bezout. Per trovare $t(x)$ ed $s(x)$ possiamo usare l'algoritmo delle divisioni successive, da cui otteniamo, con facili passaggi,

$$\begin{aligned} x^3+x^2+1 &= (x^2+1)(x+1)+(-x)\,, \\ x^2+1 &= (-x)(-x)+1\,. \end{aligned}$$

Procedendo a ritroso otteniamo

$$\begin{aligned} 1 &= (x^2+1)+x(-x)= \\ &= (x^2+1)+x[(x^3+x^2+1)-(x^2+1)(x+1)] = (x^3+x^2+1)x-(x^2+1)(x^2+x-1)\,. \end{aligned}$$

Dunque $t(x)=z$ e $s(x)=x^2+x-1$. Da qui si trova subito

$$p(x)=(x^3+x^2+1)x-1=x^4+x^3+x-1\,.$$