# Matematica per l'eccellenza, Esercizio 1.1

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/matematica/eccell/es1/es1.htm

Versione del 23 marzo 2010

## Testo

Sia $p(x)$ un polinomio a coefficienti interi e $a \neq b$ due interi tali che $p(a) = b$ e $p(b) = a$. Provare che esiste al più un intero $c$ tale che $p(c) = c$.

(Esercizio prelevato da: Poloni, F., *Z-trucchi.*)

## Soluzione

Si tratta di una dimostrazione di *unicità*, quindi un $c$ che verifichi le condizioni richieste potrebbe non esistere affatto. Bisogna prestare molta attenzione a questo fatto nei problemi, per non cadere in grossolani errori.

Se un $c$ con le caratteristiche richieste, cioè tale che $p(c) = c$, esiste, allora

$$c - a \mid p(c) - p(a) = c - b \quad \wedge \quad c - b \mid p(c) - p(b) = c - a\,.$$

Questo implica che sia

$$\frac{c-b}{c-a} \quad \text{che} \quad \frac{c-a}{c-b}$$

sono interi. Ma questo è possibile solo se sono entrambi 1 o $-1$. Ne segue

$$c - b = \pm(c - a) \;\Rightarrow \begin{cases} c - b = c - a \Rightarrow a = b \text{ non accettabile per ipotesi} \\ c - b = -c + a \Rightarrow c = \dfrac{a+b}{2} \end{cases}.$$

Dunque se $c$ esiste si ha necessariamente $c = {}^{a+b}/_{2}$, cioè l'unicità di $c$. Si noti però che un tal $c$ potrebbe non essere intero e quindi non soddisfare le condizioni del problema.