Taylor, infinitesimi e approssimazioni

Luciano Battaia*

Versione del 24 febbraio 2007

In questa nota propongo alcune considerazioni sull'uso della formula di Taylor per calcoli approssimati, in particolare sono proposti alcuni esempi per chiarire il significato di *infinitesimo di ordine superiore* e di *valutazione dell'errore*: troppo frequenti e diffuse sono infatti le errate concezioni sul senso di queste espressioni.

Indice

1 Premessa

Una trattazione abbastanza dettagliata sull'uso della formula di Taylor, con riferimento sia al calcolo dei limiti che ai calcoli approssimati, si può trovare nelle pagine seguenti, alle quali rimando per utili approfondimenti:

— http://www.batmath.it/matematica/a_taylor/taylor.htm,

— http://www.batmath.it/matematica/an_uno/limiti/taylor_limiti.htm,

— http://www.batmath.it/matematica/an_uno/taylor_dintorni/approx/approx.htm.

È interessante leggere, a proposito del calcolo approssimato dei valori di una funzione, quanto scrive Mario Dolcher nel suo *Elementi di Analisi Matematica*, Lint, Trieste, 1991.

> Il conoscere l'ordine di infinitesimo di una funzione φ, per quanto importante sia, non ci consente alcuna maggiorazione di $|\varphi(x)|$, in nessun punto:

*http://www.batmath.it

una φ può essere infinitesima, ad esempio per $x \to 0$, anche di ordine elevato, e può essere $\varphi(10^{-6}) = 3\,000\,000\,000$! Per questa ragione il risultato sulla formula di Taylor-Peano, importante e bello, non ci soddisfa agli effetti del calcolo approssimato dei valori di una funzione f. Si noti bene che, agli effetti del calcolo approssimato, nemmeno la "serie di Taylor" dà quell'informazione che invece si può trarre dalla formula di Taylor-Lagrange.

È proprio la diffusa ed errata idea che "infinitesimo", e ancor peggio "infinitesimo di ordine superiore", significhi "piccolo" o "trascurabile" agli effetti del calcolo approssimato, che mi ha spinto a scrivere queste pagine.

2 Infinitesimi e ordine

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono entrambe infinitesime, per $x \to x_0$, ovvero se

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0\,,$$

e se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,,$$

si dice che $f(x)$ è *infinitesimo di ordine superiore* rispetto a $g(x)$, per $x \to x_0$.

Dal punto di vista qualitativo si può dire che delle due quantità $f(x)$ e $g(x)$, *infinitamente piccole nei pressi di* x_0, la quantità che sta al numeratore è, sempre *nei pressi di* x_0, *infinitamente più piccola* di quella che sta al denominatore. Bisogna però prestare attenzione a non attribuire a questa frase significati particolari che essa non ha. Il problema cruciale di interpretazione sta nel significato delle parole "nei pressi di x_0". Per chiarire il problema consideriamo un esempio.

Siano $f(x)$ e $g(x)$ le due funzioni seguenti:

$$f(x) = \begin{cases} 10^{20}x - 10^{10} & \text{se} \quad x < -\dfrac{1}{10^{10}} \\ 0 & \text{se} \quad -\dfrac{1}{10^{10}} \le x \le \dfrac{1}{10^{10}} \\ 10^{20}x - 10^{10} & \text{se} \quad x > \dfrac{1}{10^{10}} \end{cases}, \quad \text{e} \quad g(x) = x\,.$$

È immediato che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} g(x) = 0\,, \quad \text{e che} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,,$$

ovvero che $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime, per $x \to 0$, e che, sempre per $x \to 0$, $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore rispetto a $g(x)$. Però, dal punto di vista dei valori delle funzioni "appena oltre 0", questi fatti non hanno alcun interesse: la funzione $f(x)$ ha valori enormemente più grandi di $g(x)$, non appena si considerino valori di x più grandi di 10^{-10}, cioè di un decimiliardesimo. Basta, per esempio, considerare $x = 2 \cdot 10^{-10}$ per ottenere $f(x) = 10^{10}$ (diecimiliardi, cioè praticamente un'enormità), e, invece $g(x) = 2 \cdot 10^{-10}$, cioè praticamente zero!

Anche se l'esempio proposto è chiaramente "patologico", la morale della favola è chiarissima:

> *Il fatto che una funzione sia* infinitesima*, o* infinitesima di ordine superiore *rispetto a un'altra funzione, è una caratteristica utilizzabile* solo ed esclusivamente *nell'ambito del calcolo di un limite e non ha* nessun interesse *per quanto riguarda la valutazione approssimata dei valori della funzione stessa.*

3 La formula di Taylor e il resto

Data una funzione $f(x)$, dotata di derivata $n-$esima in un punto x_0 (e quindi di derivate tutte continue in un opportuno intorno di x_0), il polinomio

$$T_{n,x_0}(x) = \frac{f(x_0)}{0!} + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

si chiama $n-$esimo *polinomio di Taylor* o $n-$esimo *polinomio approssimante* della funzione f in x_0.

Si usa indicare con $R_{n+1,x_0}(x)$ la differenza $f(x) - T_{n,x_0}(x)$, che viene chiamata *resto* o *termine complementare* $n-$*esimo.* Il *teorema di Taylor* afferma che questo resto è un *infinitesimo di ordine superiore rispetto a* $(x - x_0)^n$, ovvero, come si usa dire, un infinitesimo di ordine superiore a n rispetto a $(x - x_0)$. In sostanza questo resto è l'*errore* che si commette se si approssima la funzione f con il polinomio T_{n,x_0}.

Con un'ulteriore ipotesi di regolarità, al resto si può dare una delle due forme che seguono:

1. *forma di Peano*: se la funzione ha, in x_0, anche la derivata $(n + 1)-$esima, allora
$$R_{n+1,x_0}(x) = \left[\frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n + 1)!} + \alpha(x)\right](x - x_0)^{n+1},$$
ove $\alpha(x)$ è una funzione infinitesima per $x \to x_0$;
2. *forma di Lagrange*: se la funzione ha, in *tutto un intorno* di x_0, anche la derivata $(n + 1)-$esima, allora
$$R_{n+1,x_0}(x) = \left[\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}\right](x - x_0)^{n+1},$$
dove c è un punto opportuno intermedio tra x_0 e x.

Nella forma di Peano non si ha alcuna informazione sulla funzione $\alpha(x)$, se non che è infinitesima per $x \to x_0$; nella forma di Lagrange non si ha alcuna informazione sulla posizione del punto c, se non che è intermedio tra x_0 e x. Si noti la differenza tra le due richieste aggiuntive di regolarità: nella forma di Peano è sufficiente la derivabilità in x_0, nella forma di Lagrange, invece, in tutto un intorno di x_0.

La forma di Peano è particolarmente utile per il calcolo di limiti e per certe questioni teoriche, ma non è di alcuna utilità per la valutazione di quanto grande sia l'errore che si commette approssimando la funzione f con il polinomio T_{n,x_0}.

Discorso sostanzialmente diverso per la forma di Lagrange. Se infatti si riesce ad avere una stima di quanto grande sia $f^{(n+1)}(c)$, si può avere una misura dell'errore. La cosa non è per niente semplice, in generale, perchè non si ha alcuna informazione sulla posizione del punto c; se però si riesce a trovare il massimo, diciamolo M_{n+1}, di $|f^{(n+1)}(x)|$ nell'intervallo tra x_0 e x, allora si potrà avere una stima per eccesso dell'errore. Infatti si ha:

$$|R_{n+1,x_0}(x)| = \left|f^{(n+1)}(c)\right| \frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \leq M_{n+1}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Se si tiene poi presente che, per n abbastanza grande, $(n+1)!$ può essere un numero enorme, e si opera in modo che $|x-x_0|$ non superi 1, si vede subito che l'errore, in valore assoluto, potrà essere piccolo, purchè, naturalmente, il massimo di $|f^{(n+1)}(x)|$ non sia "rabbiosamente" (l'espressione è di Mario Dolcher) grande.

4 Un esempio conclusivo

Riesaminiamo più in dettaglio il resto nella forma di Lagrange:

$$R_{n+1,x_0}(x) = \left[\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}\right](x-x_0)^{n+1}\,.$$

Poichè $(n+1)!$ cresce molto rapidamente al crescere di n, mentre $(x-x_0)^n$ decresce rapidamente al crescere di n, se $|x-x_0|<1$, la forma citata può far venire il sospetto che, al crescere di n, l'approssimazione migliori sempre di più. Le cose purtroppo non stanno in questi termini, nemmeno in casi molto semplici.

Per una verifica consideriamo il caso di una funzione polinomiale, in cui i calcoli possono essere fatti "a mano":

$$f(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + \frac{11}{8}\,.$$

Con facili calcoli si ottengono i polinomi approssimanti di grado 0, 1, 2, relativi al punto $x_0 = 0$, seguenti:

— $T_{0,0}(x) = \dfrac{11}{8}$,

— $T_{1,0}(x) = \dfrac{9}{4}x + \dfrac{11}{8}$,

— $T_{2,0}(x) = -\dfrac{3}{2}x^2 + \dfrac{9}{4}x + \dfrac{11}{8}$,

risultati che erano ampiamente prevedibili.

Per trovare una maggiorazione dell'errore nei tre casi dobbiamo trovare i massimi, in $[0, 0.75]$, delle derivate prima, seconda e terza. Con facili calcoli si trova:

— $M_1 = {}^9\!/_4$;
— $M_2 = 3$;
— $M_3 = 6$.

Possiamo ora trovare una maggiorazione per l'errore nei tre casi:

— $|R_{1,0}(x)| = |f'(c)|\,|x| \le M_1|x| \le M_1 0.75 = 1.6875$;

— $|R_{2,0}(x)| = |f''(c)|\frac{|x|^2}{2} \le M_2\frac{|x|^2}{2} \le M_2\frac{0.75^2}{2} = 0.84375$,

— $|R_{3,0}(x)| = |f'''(c)|\frac{|x|^3}{6} \le M_3\frac{|x|^3}{6} \le M_3\frac{0.75^3}{6} = 0.421875$.

Come si vede, e come succede per le funzioni "non rabbiose", il massimo errore cala al crescere del grado del polinomio approssimante.

Vista la semplicità della funzione in questione, in questo caso però l'errore è facilmente calcolabile anche in termini assoluti: avremo così la possibilità di effettuare un controllo della bontà delle considerazioni che abbiamo fatto. Si trova facilmente:

— $|f(0.75) - T_{0,0}(0.75)| = 0.421875000$,
— $|f(0.75) - T_{1,0}(0.75)| = 1.265625000$,
— $|f(0.75) - T_{2,0}(0.75)| = 0.421875000$.

Come si vede, nella realtà il polinomio di grado 0 approssima meglio di quello di grado 1, ed esattamente allo stesso modo di quello di grado 2. La figura seguente illustra la situazione.