Funzioni composte: tips and tricks

Luciano Battaia*

14 novembre 2012

Siano date due funzioni f e g e si voglia calcolarne la composta $f \circ g$ (nell'ipotesi che la composizione sia possibile).

Per evitare errori conviene adottare l'accorgimento di usare nomi diversi per le variabili delle funzioni componenti. Precisamente si indica con x la variabile indipendente di g, ovvero della funzione più interna che viene applicata per prima, con t la sua variabile dipendente, che sarà la variabile indipendente di f, ovvero della funzione più esterna che agisce per ultima, infine con y la variabile dipendente di f. In sostanza si scrive

$$y = f(t), \quad t = g(x), \quad y = f(g(x)),$$

anche se, dal punto di vista formale, non si dovrebbe mai scrivere una funzione nella forma $y = h(x)$.

Per esempio se devo comporre la funzione $f(x) = x^2 + \sin(x)$ con la funzione $g(x) = \cos(x) + x$ per ottenere la funzione $f(g(x))$, converrà scrivere

$$y = t^2 + \sin(t), \quad t = \cos(x) + x \ :$$

questa scrittura rende evidente che, per scrivere la funzione composta richiesta, basterà sostituire al posto di t nella formula $y = t^2 + \sin(t)$ l'espressione $\cos(x) + x$. Naturalmente occorrerà controllare che, al variare di x nel dominio di g, il corrispondente valore di t appartenga sempre al dominio di f (e in questo caso non ci sono problemi di questo tipo, visto che il dominio di f è tutto $\mathbb{R}$). Si otterrà:

$$y = f(g(x)) = \big(\cos(x) + x\big)^2 + \sin\big(\cos(x) + x\big).$$

Come secondo esempio consideriamo le funzioni $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2$. Per avere $f(g(x))$ converrà scrivere

$$y = \sqrt{t}, \quad t = x^2,$$

che fornisce

$$y = f(g(x)) = \sqrt{x^2}\ \big(= |x|\big), \ \text{valida } \forall x.$$

Per avere invece $g(f(x))$ converrà scrivere

$$y = t^2, \quad t = \sqrt{x},$$

che fornisce

$$y = g(f(x)) = \big(\sqrt{x}\big)^2\ \big(= x\big), \quad \text{con } x \geq 0\,.$$

Si noti come $f \circ g$ sia diversa da $g \circ f$, in accordo con il fatto che f e g *non* sono una l'inversa dell'altra.

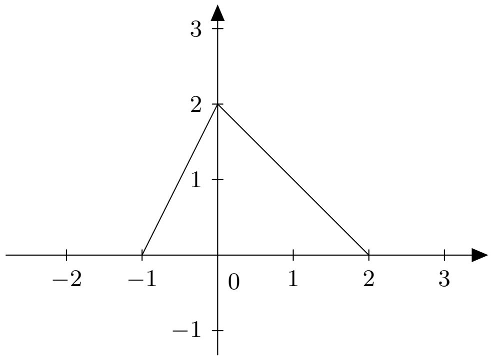
---

* http://www.batmath.it

Non sempre le cose sono così facili: lo proveremo su un esempio. Sia

$$f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{se} \quad -1 \le x < 0 \\ 2-x, & \text{se} \quad 0 \le x \le 2 \end{cases},$$

funzione il cui grafico è di seguito rappresentato.



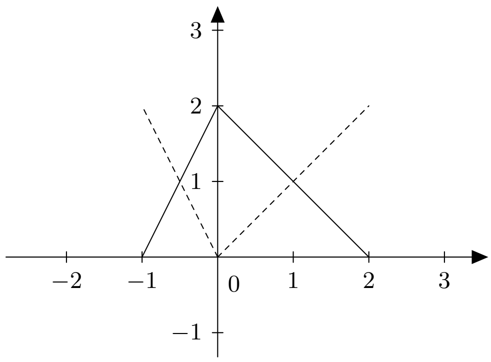
Si vuole trovare $f(f(x))$. In questo caso, pur essendo $f = g$, converrà sempre seguire la convenzione sopra segnalata:

$$y = f(t) = \begin{cases} 2t+2, & \text{se} \quad -1 \le t < 0 \\ 2-t, & \text{se} \quad 0 \le t \le 2 \end{cases}, \qquad t = f(x) = \begin{cases} 2x+2, & \text{se} \quad -1 \le x < 0 \\ 2-x, & \text{se} \quad 0 \le x \le 2 \end{cases}.$$

Prima di procedere occorrerà valutare, al variare di x in $[0, 2]$, quanto vale t, per poter capire se questo valore di t andrà inserito nella prima o nella seconda delle espressioni matematiche che definiscono $f(t)$. Si vede subito (anche dal grafico sopra riportato) che, al variare di x nel dominio di $f(x)$, t appartiene sempre all'intervallo $[0, 2]$. Ne segue che questo valore di t deve essere inserito nella seconda delle espressioni matematiche che definiscono $f(t)$. Si ottiene perciò:

$$y = f(f(x)) = \begin{cases} 2-(2x+2) = -2x, & \text{se} \quad -1 \le x < 0; \\ 2-(2-x) = x, & \text{se} \quad 0 \le x \le 2. \end{cases}$$

Il grafico di questa funzione composta è di seguito rappresentato (in tratteggio).



Non è privo di interesse osservare una peculiarità di questa funzione: se si fa un'ulteriore composizione di f sempre con se stessa si ottiene di nuovo f, ovvero

$$f(f(f(x))) = f(x),$$

fatto la cui verifica è ora immediata.