Esercizi di Analisi II - Funzioni implicite, 1

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/matematica/an_due/implicite/implicite.htm

Versione del 12 gennaio 2010

Testo

Si consideri la funzione di tre variabili seguente

$$F(x,y,z)=\int_{x+y}^{y^2+2z} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+x^2+y^2+z^2\,,$$

e il punto $P_0=(0,0,0)$. Si dica se l'equazione $F(x,y,z)=0$ definisce, in un intorno di $(0,0)$, una funzione implicita $\varphi(x,y)$ tale che $\varphi(0,0)=0$. In caso affermativo si calcoli l'equazione del piano tangente al grafico di $\varphi(x,y)$, in corrispondenza al punto $(0,0)$.

Soluzione

Intanto il punto $P_0=(0,0,0)$ appartiene al luogo di equazione $F(x,y,z)=0$, come è immediato verificare. La funzione F è inoltre di classe C^1, perché somma di un polinomio e di una funzione derivabile con derivata continua, per il teorema fondamentale del calcolo integrale.

Per calcolare le derivate di F conviene spezzare l'integrale mediante la scelta di un punto qualunque del dominio della funzione integranda (in questO caso un qualunque reale, per esempio 0): si ottiene

$$F(x,y,z)=-\int_0^{x+y} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+\int_0^{y^2+2z} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t+x^2+y^2+z^2\,.$$

Dunque

— $F'_x(x,y,z)=-\mathrm{e}^{-(x+y)^2}+2x \Longrightarrow F'_x(0,0,0)=-1\,;$

— $F'_y(x,y,z)=-\mathrm{e}^{-(x+y)^2}+\mathrm{e}^{-(y^2+2z)^2}2y+2y \Longrightarrow F'_y(0,0,0)=-1\,;$

— $F'_z(x,y,z)=\mathrm{e}^{-(y^2+2z)^2}2+2z \Longrightarrow F'_z(0,0,0)=2\,.$

Il fatto che $F'_z(0,0,0)\neq 0$ garantisce (teorema del Dini), assieme alle citate condizioni di regolarità di F, che esiste una funzione $\varphi(x,y)$ definita in un intorno I di $(0,0)$, tale che

— $\varphi(0,0)=0\,;$

— $F(x,y,\varphi(x,y))=0\,,\ \forall(x,y)\in I\,;$

— la funzione φ ha le derivate parziali prime (continue) in I date da

$$\varphi'_x(x,y) = -\frac{F'_x(x,y,\varphi(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))}\,, \quad \varphi'_y(x,y) = -\frac{F'_y(x,y,\varphi(x,y))}{F'_z(x,y,\varphi(x,y))}\,,$$

e, in particolare,

$$\varphi'_x(0,0) = -\frac{F'_x(0,0,\varphi(0,0))}{F'_z(0,0,\varphi(0,0))} = -\frac{F'_x(0,0,0)}{F'_z(0,0,0)} = \frac{1}{2}\,,$$

$$\varphi'_y(0,0) = -\frac{F'_y(0,0,\varphi(0,0))}{F'_z(0,0,\varphi(0,0))} = -\frac{F'_y(0,0,0)}{F'_z(0,0,0)} = \frac{1}{2}\,.$$

Si può subito dedurre da qui l'equazione del piano tangente richiesto:

$$z = \varphi(0,0) + \varphi'_x(0,0)(x-0) + \varphi'_y(0,0)(y-0) \Longrightarrow z = \frac{1}{2}\,x + \frac{1}{2}\,y\,.$$