# Esercizi di Analisi II - Funzioni implicite, 2

Materiale prelevato da

http://www.batmath.it/matematica/an_due/implicite/implicite.htm

Versione del 12 gennaio 2010

## Testo

Dire se esiste qualche punto $(x_0, y_0)$ tale che da

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3 = 0$$

si possa ricavare $y = \varphi(x)$ con $\varphi(x_0) = y_0$ e $\varphi'(x_0) = 0$. In caso affermativo dire se $x_0$ è punto di massimo o minimo per $\varphi$.

## Soluzione

Nessun problema si pone per quanto riguarda la regolarità della funzione $f$. Un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ con le caratteristiche richieste esiste solo se

— $f(x_0, y_0) = x_0^3 - 3x_0y_0 + y_0^3 = 0\,;$

— $\varphi'(x_0) = -\dfrac{f'_x(x_0, \varphi(x_0))}{f'_y(x_0, \varphi(x_0))} = \dfrac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = 0 \Longrightarrow f'_x(x_0, y_0) = 0\,.$

Si dovrà dunque risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_0^3 - 3x_0y_0 + y_0^3 = 0 \\ 3x_0^2 - 3y_0 = 0 \end{cases} .$$

Il sistema ha le soluzioni

$$(0,0) \quad \text{e} \quad \left(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4}\right).$$

La prima coppia va scartata perché per essa si ha $f'_y(x_0, y_0) = 0$, la seconda invece soddisfa tutte le condizione richieste.

Poiché si ha $\varphi'(x_0) = 0$, $x_0$ è un punto stazionario per $\varphi$. Per trovarne la natura facciamo la derivata seconda di $\varphi$. Si può procedere in vari modi, tra cui quello di derivare l'espressione esplicita della derivata prima:

$$\varphi'(x) = \frac{f'_x(x, \varphi(x))}{f'_y(x, \varphi(x))} = -\frac{3x^2 - 3\varphi(x)}{-3x + 3\varphi^2(x)}\,.$$

Si ottiene

$$\varphi''(x) = -\frac{(6x - 3\varphi'(x))(-3x + 3\varphi^2(x) - (3x^2 - 3\varphi(x))(-3 + 6\varphi(x)\varphi'(x)))}{(-3x + 3\varphi^2(x))^2}\,.$$

Tenendo conto che $\varphi(\sqrt[3]{2}) = \sqrt[3]{4}$, $\varphi'(\sqrt[3]{2}) = 0$, si trova subito

$$\varphi''(\sqrt[3]{2}) = -2 < 0\,,$$

da cui si deduce che il punto trovato è di massimo relativo per $\varphi$.