Es. di Analisi II - Funzioni di due variabili, 1

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/matematica/an_due/due_var/due_var.htm

Versione del 14 gennaio 2010

Testo

Sia data la funzione

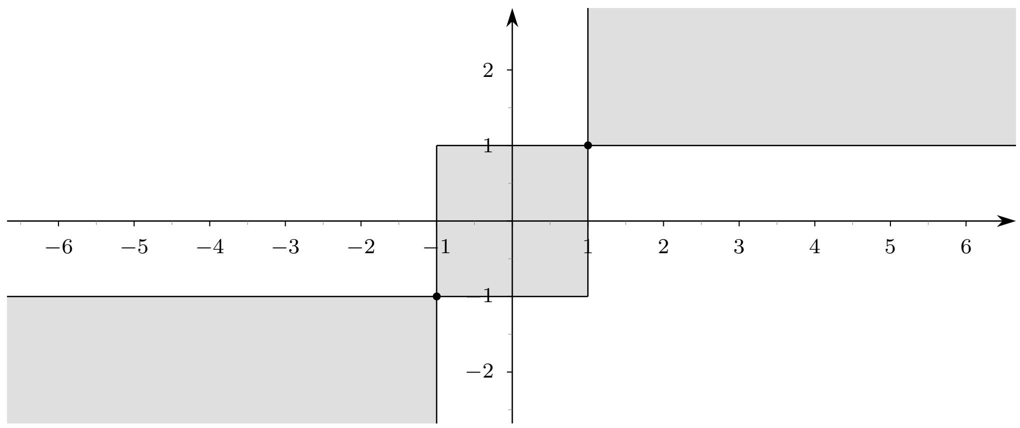
$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \int_x^y \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t.$$

1. Se ne trovi il dominio.
2. Senza calcolare l'integrale si trovi l'equazione del piano tangente al grafico della funzione f, in corrispondenza al punto $(2,2)$.
3. Si ritrovi il risultato del punto precedente, calcolando esplicitamente l'integrale.

Soluzione

Poiché la funzione integranda è definita in $\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, e in prossimità dei punti -1 e 1 è illimitata[1], l'intervallo di integrazione non deve contenere i punti -1 e 1. Ciò significa che x ed y dovranno essere contemporaneamente minori di 1, oppure contemporaneamente compresi tra -1 e 1, oppure contemporaneamente maggiori di 1.

La rappresentazione grafica di questo dominio nel piano Oxy è riportata nella figura che segue.



[1] Se non diversamente precisato, gli integrali sono sempre da intendersi come integrali di Riemann, dove è indispensabile che la funzione integranda sia limitata. In ogni caso, anche se si volesse intendere l'integrale in senso improprio, l'intervallo di integrazione non potrebbe comprendere i punti -1 e 1, in quanto la funzione integranda è infinita di ordine 1 in entrambi i punti e quindi l'integrale improprio sarebbe divergente.

Il punto $(2,2)$ è interno al dominio e, sulla base della regolarità della funzione integranda e del teorema fondamentale del calcolo integrale, possiamo affermare che la f è almeno di classe C^1 in un intorno di $(2,2)$, dunque è differenziabile in $(2,2)$. Per trovare l'equazione del piano tangente basterà usare la nota formula

$$z = f(2,2) + \frac{\partial f}{\partial x}(2,2)(x-2) + \frac{\partial f}{\partial y}(2,2)(y-2)\,.$$

Per calcolare le derivate parziali (senza calcolare l'integrale, cioè applicando il teorema fondamentale del calcolo integrale) conviene riscrivere la funzione come segue:

$$f(x,y) = \int_x^c \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t + \int_c^y \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = -\int_c^x \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t + \int_c^y \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t\,,$$

essendo c un punto qualunque (maggiore di 1 per non uscire dall'intervallo $]1,+\infty[$). Si ha allora, sulla base del teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2-1}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{y^2-1}\,,$$

da cui

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,2) = -\frac{1}{3}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(2,2) = \frac{1}{3}\,.$$

Tenendo conto che

$$f(2,2) = \int_2^2 \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = 0\,,$$

l'equazione del piano tangente sarà

$$z = -\frac{1}{3}(x-2) + \frac{1}{3}(y-2)\,.$$

Passiamo ora al calcolo dell'integrale, utilizzando le tecniche per l'integrazione delle funzioni razionali fratte.

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} = \frac{At+A+Bt-B}{(t-1)(t+1)} = \frac{(A+B)t+(A-B)}{t^2-1} \implies$$
$$\implies \begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \implies \begin{cases} A = 1/2 \\ B = -1/2 \end{cases} \implies \frac{1}{t^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{t+1}\right)\,.$$

Se ne deduce che

$$\int_x^y \frac{1}{t^2-1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\ln(t-1) - \frac{1}{2}\ln(t+1)\right]_x^y = \frac{1}{2}\ln(y-1) - \frac{1}{2}\ln(y+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln(x+1)\,,$$

dove abbiamo evitato negli argomenti del logaritmo, di scrivere il modulo, in quanto tutti gli argomenti sono strettamente positivi $(x>1 \land y>1)$.

Il calcolo delle derivate parziali a partire da questa espressione esplicita della funzione f porta agli stessi valori di prima: se ne deduce che si otterrà di nuovo l'equazione del piano tangente già trovata.