Integrali impropri

Luciano Battaia*

Versione del 3 dicembre 2010

In questa nota presento le definizioni e alcune proprietà degli integrali impropri, con particolare riguardo al motivo di certe scelte nelle definizioni.

Il concetto di integrale improprio è una generalizzazione non banale del concetto di integrale di Riemann, e ritengo che solo una riflessione accurata sul significato delle definizioni date possa contribuire ad evitare errori anche grossolani.

Non sono proposte qui le dimostrazioni dei vari risultati, che si possono trovare su un qualunque manuale di analisi delle funzioni di una variabile.

Indice

1 Definizioni

L'integrale di Riemann risolve il problema della misura di insiemi piani in un grande numero di casi, ma non è sufficiente per le applicazioni, anche in casi di frequente interesse. Solo la teoria dell'integrazione secondo Lebesgue risulta essere pienamente soddisfacente, sia dal punto di vista pratico che da quello teorico. Tra l'altro con la teoria di Lebesgue si risolve anche il problema dell'integrazione di funzioni che, per l'integrabilità secondo Riemann, sono "troppo discontinue"; l'integrale di Lebesgue ha anche numerosi altri vantaggi dal punto di vista teorico.

Considerata comunque la complessità della teoria dell'integrale secondo Lebesgue, è possibile introdurre invece una estensione del concetto di integrale di Riemann, sufficiente a trattare alcuni casi più comuni: si tratta del concetto di integrale improprio, in cui si esaminano i casi di funzioni definite su intervalli illimitati, oppure illimitate in prossimità di un numero finito di punti.

Considereremo separatamente i due casi citati.

*http://www.batmath.it

1.1 Integrazione su intervalli illimitati

Nei casi più comuni capita di considerare quasi esclusivamente funzioni continue su semirette oppure sull'intera retta reale. Poichè però non costa nessuna fatica in più considerare anche funzioni che siano solo integrabili (e quindi magari discontinue), tratteremo direttamente questo caso.

Definizione (Integrale improprio su intervalli illimitati)
Sia $f\colon I = [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[c,d]$ *contenuto in* I*. Allora ha senso,* $\forall t \in I$*,*

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Se

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = l \in \mathbb{R}\,,$$

la funzione si dice integrabile in senso improprio, o generalizzato, *in* I *e si pone*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = l$$

Analoga definizione se la funzione gode delle stesse proprietà in $I =]-\infty, a]$, che porta alla considerazione dell'integrale

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

nell'ipotesi che il limite esista finito.

Se poi la funzione gode delle stesse proprietà addirittura in tutto $\mathbb{R}$, allora si può definire l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

come somma degli integrali

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

purchè *entrambi* gli integrali esistano, ciascuno per proprio conto, finiti, ovvero purché esistano finiti i due limiti

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Osservazione 1.1. Bisogna prestare particolare attenzione al fatto che l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

è definito mediante due limiti che vanno calcolati *separatamente* e che devono esistere, *entrambi*, finiti.

A titolo d'esempio consideriamo la funzione $f(x) = x$ (su tutto $\mathbb{R}$). Per valutare l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,\mathrm{d}x\,,$$

dobbiamo calcolare, separatamente,

$$\lim_{t\to-\infty}\int_{t}^{0} x\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \lim_{t\to+\infty}\int_{0}^{t} x\,\mathrm{d}x\,.$$

Il primo limite vale $-\infty$, mentre il secondo vale $+\infty$, per cui l'integrale richiesto non esiste o, come si usa dire, diverge.

Se avessimo calcolato, invece,

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} x\,\mathrm{d}x\,,$$

avremmo ottenuto 0, e questo non sarebbe stato il valore dell'integrale proposto, almeno secondo la definizione che abbiamo dato. Vedremo in seguito (paragrafo 2) il perché della scelta fatta nel definire questo tipo di integrale improprio.

1.2 Integrale improprio di funzioni illimitate

Considereremo inizialmente una funzione illimitata in prossimità di un solo punto, x_0, di un intervallo $[a, b]$, e integrabile secondo Riemann in un qualunque sottointervallo di $[a, b] \setminus \{x_0\}$; successivamente estenderemo tale definizione a funzioni illimitate in prossimità di un numero finito di punti di un intervallo $[a, b]$. Avvertiamo che, in molti casi, il punto x_0 coincide con uno dei due estremi dell'intervallo di integrazione.

Definizione (Integrale improprio di funzioni illimitate)
Sia $f\colon I = [a, b] \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[c, d]$ contenuto in I. La funzione può anche essere illimitata in un intorno di x_0. Se t e u sono punti di I, con $t < x_0$ e $u > x_0$, hanno senso, rispettivamente, gli integrali

$$\int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad t < x_0 \qquad e \qquad \int_{u}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\,,\quad u > x_0\,.$$

Se, ciascuno per proprio conto, esistono finiti i limiti

$$\lim_{t\to x_0^-}\int_{a}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad e \qquad \lim_{u\to x_0^+}\int_{u}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

allora si pone

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to x_0^-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \lim_{u\to x_0^+}\int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Se x_0 coincide con a oppure con b, basta considerare uno solo dei due integrali e limiti precedenti. Se invece di un unico punto x_0, ce ne sono un numero finito con le stesse caratteristiche, basterà "spezzare" l'integrale in corrispondenza di ciascuno dei punti, esattamente come fatto con x_0.

Osservazione 1.2. Bisogna prestare particolare attenzione al fatto che l'integrale improprio

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

è definito mediante due limiti che vanno calcolati *separatamente* e che devono esistere, *entrambi*, finiti.

A titolo d'esempio consideriamo la funzione $g(x) = 1/x$, in $[-1, 1]$. Per calcolare l'integrale improprio

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,,$$

dobbiamo calcolare, separatamente,

$$\lim_{t\to 0^-}\int_{-1}^{t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \lim_{u\to 0^+}\int_{t}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\,.$$

Il primo limite vale $-\infty$, mentre il secondo vale $+\infty$, per cui l'integrale richiesto non esiste o, come si usa dire, diverge.

Se avessimo calcolato, invece,

$$\lim_{t\to 0^+}\left[\int_{-1}^{-t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{t}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\right]\,,$$

avremmo ottenuto zero, e questo non sarebbe stato il valore dell'integrale proposto. Vedremo fra poco (paragrafo 2) il perché della scelta fatta nel definire questo tipo di integrale improprio.

2 Perchè queste definizioni?

È logico e naturale chiedersi perchè le definizioni menzionate nelle osservazioni 1.1 e 1.2 non siano da considerarsi corrette: in fondo se si considera, per esempio, la funzione $f(x) = x$, e si tiene conto che è simmetrica rispetto all'origine, parrebbe logico pensare che il suo integrale da $-\infty$ a $+\infty$ debba essere nullo, come è nullo l'integrale della stessa funzione su qualunque intervallo limitato e simmetrico rispetto all'origine: in fondo le aree delle due regioni (illimitate) sopra e sotto l'asse delle ascisse sono identiche e quindi è giusto aspettarsi che la loro somma sia zero.

Il fatto è che la definizione di integrale su tutto $\mathbb{R}$ mediante il limite seguente

$$\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

oppure di integrale di una funzione illimitata in prossimità di un punto x_0 mediante il limite seguente

$$\lim_{t\to 0^+}\left[\int_{a}^{x_0-t} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{x_0+t}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x\right]\,,$$

porta a contraddizioni insanabili, come mostrano i (volutamente numerosi) esempi che seguono.

Esempio 2.1. Considerata la funzione $f(x)=x-1$, otteniamo

$$\int_{-t}^{t}(x-1)\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{-t}^{t}=-2t\,;$$

se ora calcoliamo il limite, per $t\to+\infty$, otteniamo $-\infty$, anche se, dal punto di vista geometrico, la situazione delle aree situate "sopra e sotto" l'asse delle x non è assolutamente cambiata rispetto a quanto succedeva con la funzione $f(x)=x$: la funzione $f(x)=x-1$ è solo spostata verso destra di un'unità rispetto alla funzione $f(x)=x$, ma questo non può modificare la situazione geometrica complessiva delle aree delle regioni (illimitate) in questione.

Esempio 2.2. Considerata la funzione $f(x)=\operatorname{sgn}(x)$

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & \text{se} \quad x<0\\ \ \ 0 & \text{se} \quad x=0\\ \ \ 1 & \text{se} \quad x>0\end{cases}\,,$$

otteniamo

$$\int_{-t}^{t}\operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-t}^{0}(-1)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{t}1\,\mathrm{d}x=[-x]_{-t}^{0}+[x]_{0}^{t}=0\,,$$

per cui il limite per $t\to+\infty$ è chiaramente 0.

Se spostiamo la funzione verso destra di $a\,(>0)$ unità, otteniamo $f(x)=\operatorname{sgn}(x-a)$. Ripetiamo il calcolo dell'integrale da $-t$ a t, supponendo $t>a$, cosa che non porta problemi, visto che dobbiamo poi calcolare il limite per $t\to+\infty$.

$$\int_{-t}^{t}\operatorname{sgn}(x-a)\,\mathrm{d}x=\int_{-t}^{a}(-1)\,\mathrm{d}x+\int_{a}^{t}1\,\mathrm{d}x=[-x]_{-t}^{a}+[x]_{a}^{t}=(-a)-(-(-t))+t-a=-2a\,,$$

e, se calcoliamo il limite per $t\to+\infty$ otteniamo $2a$, ovvero un risultato variabile al variare di a, cosa che è difficilmente accettabile dal punto di vista geometrico, in quanto le aree delle regioni (illimitate) "sopra e sotto" l'asse delle x non vengono modificate da questi spostamenti del grafico.

Esempio 2.3. Riprendiamo in considerazione la funzione $\operatorname{sgn}(x)$ dell'esempio precedente e calcoliamone l'integrale tra $-t$ e $2t$, con $t>0$:

$$\int_{-t}^{2t} \operatorname{sgn}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-t}^{0} (-1)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2t} 1\,\mathrm{d}x = [-x]_{-t}^{0} + [x]_{0}^{2t} = t\,,$$

e questa volta il limite per $t \to +\infty$ vale $+\infty$, nonostante il fatto che, geometricamente, si ottengano sempre le stesse aree nel piano cartesiano.

Esempio 2.4. Consideriamo ora le funzioni

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{2x}{1+x^4}\,.$$

Otteniamo:

$$\int_{-t}^{t} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x^2)]_{-t}^{t} = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-t}^{t} \frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{arctg}(x^2)]_{-t}^{t} = 0\,,$$

da cui deduciamo che, in entrambi i casi, il limite per $t \to +\infty$ vale 0.

Se però modifichiamo l'intervallo di integrazione in $[-t, 2t]$ otteniamo:

$$\int_{-t}^{2t} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = [\ln(1+x^2)]_{-t}^{2t} = \frac{\ln(1+t^2)}{\ln(1+4t^2)}$$

$$\int_{-t}^{2t} \frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = [\operatorname{arctg}(x^2)]_{-t}^{t} = \operatorname{arctg}(4t^2) - \operatorname{arctg}(t^2)\,,$$

da cui deduciamo che nel primo caso il limite per $t \to +\infty$ vale 1, mentre nel secondo continua a valere 0 (come ci parrebbe logico).

Il motivo di questo diverso comportamento sta nel fatto che, per la prima funzione, l'integrale improprio secondo la definizione corrente diverge, mentre, nel secondo caso, converge. Dunque la definizione corrente di integrale improprio è adatta a tradurre in formule un concetto geometrico che ci pare evidente. La definizione basata invece sul

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ci pare del tutto inadatta.

Esempi simili possono essere fatti anche per il caso di funzioni illimitate in prossimità di qualche punto.

Esempio 2.5. Riprendiamo in esame la funzione $f(x) = {}^1\!/\!{}_x$ e isoliamo, questa volta, il punto in cui la funzione tende all'infinito, con un intervallo del tipo $[-t, 2t]$:

$$\int_{-1}^{-t} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{2t}^{1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = [\ln|x|]_{-1}^{-t} + [\ln|x|]_{2t}^{1} = -\ln 2\,,$$

da cui deduciamo subito che il limite, per $t \to 0$, vale $-\ln 2$, ossia un risultato diverso da quello (che valeva 0), ottenuto prima, nonostante non ci sia alcuna variazione nelle regioni di cui calcolare le aree.

Anche questa volta il problema è legato al fatto che la funzione $1/x$ ha un integrale improprio divergente, secondo la definizione che abbiamo dato precedentemente. Se infatti si considera una funzione dispari e con integrale improprio convergente, il modo come si isola il "punto di infinito" è ininfluente ai fini del risultato. Lo si può provare (è un facile esercizio!) con la funzione

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{se} \quad x > 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{se} \quad x < 0\,, \end{cases}$$

da integrare nell'intervallo [-1,1]

In realtà il

$$\lim_{t \to +\infty} \int_{-t}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x$$

e il

$$\lim_{t \to 0^+} \left[\int_{a}^{c-t} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c+t}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right],$$

hanno interesse, per esempio, nella teoria delle distribuzioni e anche in altri campi e si chiamano, rispettivamente,

— *Valore principale di Cauchy di* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$;

— *Valore principale di Cauchy di* $\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$,

ma si tratta di tutta un'altra cosa.

3 Una proprietà speciale

Molte delle proprietà dell'integrale di Riemann si estendono agli integrali impropri (anche se con le dovute cautele), ma c'è una proprietà molto importante che è completamente diversa per gli integrali di Riemann e per quelli impropri, ed è quella che riguarda i legami tra una funzione e il valore assoluto della stessa.

Precisamente:

— Se $f(x)$ è una funzione integrabile secondo Riemann in un intervallo (chiuso e limitato) $[a, b]$, allora anche la funzione $|f(x)|$ è integrabile secondo Riemann nello stesso intervallo e si ha:

$$\left| \int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_{a}^{b} |f(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

— Se il modulo di una funzione $f(x)$ è integrabile in senso improprio in un intervallo I, allora anche $f(x)$ è integrabile in I e si ha

$$\left| \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x\,.$$

Si noti che le due proprietà sono esattamente una il contrario dell'altra, anche se la disuguaglianza relativa è la stessa.

Tutto questo significa che una funzione può essere integrabile in senso improprio senza che lo sia il suo valore assoluto. Un esempio importante (anche se non semplice da discutere se non si conoscono le serie), è quello della funzione ${}^{\sin x}/_{x}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, \mathrm{d}x < +\infty \quad \text{mentre} \quad \int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| \mathrm{d}x = +\infty\,.$$

4 Due esempi interessanti

Esaminando le proprietà dell'integrale improprio, in particolare nel caso di integrali su intervalli illimitati, può venire il sospetto che una funzione (in particolare se si tratta di una funzione positiva), possa essere integrabile solo se il suo limite all'infinito è zero. I due esempi che seguono provano che ciò non è vero.

Esempio 4.1. Consideriamo la funzione $g(x)$ definita, in $[1, +\infty[$, dalle condizioni che seguono:

— per ogni intero $n \geq 1$ si ponga $g(n) = 1$;

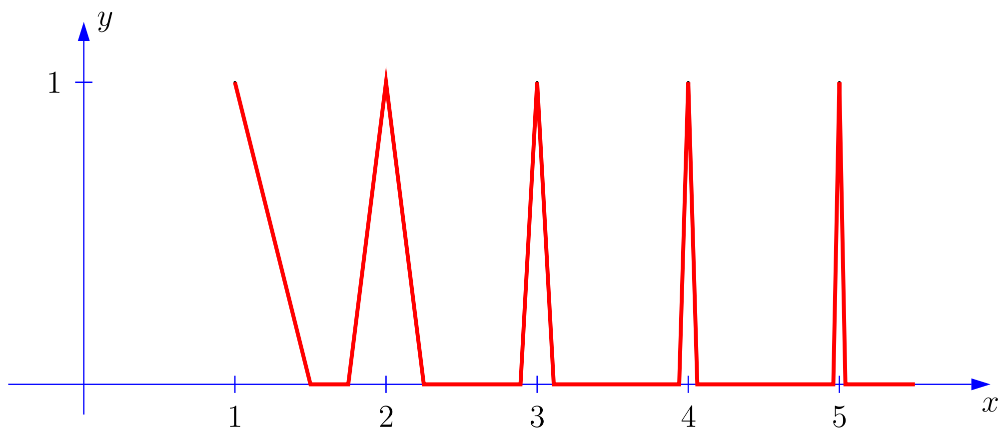
— per ogni intero $n \geq 1$ si considerino i segmenti

$$\left[n - \frac{1}{n^2}, n\right] \quad \text{e} \quad \left[n, n + \frac{1}{n^2}\right]\;;$$

si ponga uguale a 0 la funzione nell'estremo sinistro del primo segmento e nell'estremo destro del secondo, mentre la si definisca, all'interno dei due segmenti, in modo che abbia come grafico un segmento congiungente $(n - {}^{1}/_{n^2}, 0)$ con $(n, 1)$ e un altro segmento congiungente $(n, 1)$ con $(n + {}^{1}/_{n^2}, 0)$;

— si ponga $g(x) = 0$ in tutti i tratti rimanenti.

Una parte del grafico è rappresentata nella figura di seguito.



Ebbene questa funzione è

— continua in $[1, +\infty[$;
— positiva in $[1, +\infty[$;
— non ha limite (in particolare non tende a zero) per $x \to +\infty$;
— è integrabile in senso improprio in $[1, +\infty[$ (anche se per la dimostrazione occorre conoscere la teoria delle serie).

Esempio 4.2. Si può modificare leggermente l'esempio precedente in modo da costruire una funzione integrabile in senso improprio in $[1, +\infty[$, positiva, e addirittura illimitata in qualunque intorno di $+\infty$.

Basta riprendere la funzione g dell'esempio precedente e considerare le seguenti modifiche:

— porre $g(n) = n$, anziché $g(n) = 1$;
— considerare i segmenti

$$\left[n - \frac{1}{n^3}, n\right] \quad \text{e} \quad \left[n, n + \frac{1}{n^3}\right] ;$$

al posto dei precedenti.

Si ottiene una funzione il cui grafico è ancora fatto da segmenti sull'asse x e triangoli sopra l'asse x stessa, come prima, solo che ora i triangoli hanno base più piccola dei precedenti, ma, in compenso, altezze che tendono all'infinito.

5 Conclusioni

Il concetto di integrale improprio è molto interessante ed utile nelle applicazioni. In particolare è sorprendente il fatto che consenta di attribuire area finita a regioni illimitate del piano.

Esso va comunque trattato con estrema cautela per non cadere in errore madornali e difficili da scoprire.

È interessante, a questo proposito, segnalare un fatto clamoroso, successo agli esami di stato di Liceo Scientifico. Nella sessione straordinaria degli esami dell'anno scolastico $2004 - 2005$ è stato proposto un quesito che richiedeva, testualmente, il calcolo della derivata della funzione

$$f(x) = \int_{-x}^{2x} \frac{1}{\sin t} \, \mathrm{d}t \, .$$

Ora, come si può provare facilmente, l'integrale (improprio!) proposto diverge qualunque sia il numero reale x, e dunque la funzione non è definita per nessun valore di x (a meno che gli *esperti* estensori del quesito non volessero riferirsi al valore principale di Cauchy dell'integrale stesso, cosa che mi pare oltremodo improbabile, visto che di un simile argomento non si fa cenno in nessun programma di scuola media superiore e, a quanto mi risulta, nemmeno nella quasi totalità dei corsi universitari, per lo meno di primo livello).

È anche interessante notare che le uniche soluzioni che sono riuscito a trovare in rete alla data della stesura di questo fascicoletto riportano soluzioni (ovviamente errate!) in cui non si fa menzione della grave svista presente nel testo.