

*L. Battaia*

Algebra lineare  
e geometria  
analitica

*Indice*



Pag. 1 di 157

# Algebra lineare e geometria analitica

Vettori, matrici, rette e piani nello spazio

Luciano Battaia

20 giugno 2007

# Premessa

Questa nota contiene una introduzione alla geometria analitica delle rette e dei piani nel piano e dello spazio, utilizzando estesamente la teoria delle matrici e il calcolo vettoriale.

I destinatari sono principalmente studenti del triennio terminale del liceo scientifico, indirizzo sperimentale PNI o Brocca, ma l'introduzione può essere utile anche a chi si appresta a affrontare il corso di geometria del primo anno universitario.

Lo scopo di questi appunti è essenzialmente pratico e di riepilogo dei concetti fondamentali: pertanto non sono inserite le dimostrazioni dei risultati via via ottenuti.

# Indice

<b>Premessa</b>	<b>2</b>
<b>1 Richiami sui sistemi lineari in due incognite</b>	<b>6</b>
1.1 Equazioni lineari in una o due incognite	7
1.2 Sistemi di equazioni lineari in due incognite	9
1.3 Il metodo di Cramer	10
1.4 Esercizi	12
<b>2 Matrici e operazioni tra matrici</b>	<b>13</b>
2.1 Definizioni	14
2.2 Operazioni tra matrici	17
2.3 Determinante di una matrice quadrata	21
2.4 Calcolo dell'inversa di una matrice	24
2.5 Rango di una matrice	25
2.6 Esercizi	26
<b>3 Sistemi lineari</b>	<b>27</b>
3.1 Definizioni	28
3.2 Risoluzione del sistema	31
3.3 Esercizi	34
<b>4 Vettori nello spazio ordinario</b>	<b>35</b>

4.1	Definizioni . . . . .	36
4.2	Operazioni lineari tra vettori . . . . .	40
4.3	Prodotto scalare . . . . .	44
4.4	Prodotto vettoriale . . . . .	47
4.5	Prodotto misto . . . . .	51
4.6	Parallelismo, perpendicolarità, complanarità . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Coordinate cartesiane, vettori e componenti</b>	<b>54</b>
5.1	Coordinate cartesiane di punti nel piano e nello spazio . . . . .	55
5.2	Le formule fondamentali della geometria analitica del piano e dello spazio . . . . .	57
5.3	Componenti di vettori nel piano e nello spazio . . . . .	59
5.4	Operazioni tra vettori, mediante le componenti . . . . .	64
5.5	Esempi . . . . .	66
5.6	Esercizi . . . . .	69
<b>6</b>	<b>Rette nel piano, rette e piani nello spazio</b>	<b>70</b>
6.1	Equazioni, sistemi di equazioni e loro grafico . . . . .	71
6.2	Grafici non cartesiani . . . . .	73
6.3	La retta nel piano cartesiano . . . . .	76
6.4	Applicazioni . . . . .	81
6.4.1	Condizioni di parallelismo . . . . .	81
6.4.2	Condizione di perpendicolarità . . . . .	82
6.4.3	Retta per due punti . . . . .	82
6.4.4	Retta per un punto e parallela (o perpendicolare) a una retta data . . . . .	83
6.4.5	Distanza di un punto da una retta . . . . .	84
6.5	Intersezioni di rette nel piano . . . . .	87
6.6	Rette nel piano: esercizi . . . . .	89
6.7	Piani nello spazio cartesiano . . . . .	90
6.8	Applicazioni . . . . .	94

6.8.1	Condizioni di parallelismo e perpendicolarità . . . . .	94
6.8.2	Piano per tre punti non allineati . . . . .	94
6.8.3	Piano per un punto e parallelo a un piano dato . . . . .	95
6.8.4	Distanza di un punto da un piano . . . . .	95
6.9	Intersezione di piani nello spazio . . . . .	97
6.10	Rette nello spazio . . . . .	99
6.11	Esempi e applicazioni . . . . .	101
6.12	Esercizi . . . . .	103
6.13	Un esercizio conclusivo risolto e commentato . . . . .	104



# 1 Richiami sui sistemi lineari in due incognite

Questo capitolo ha carattere introduttivo e serve solo a richiamare i concetti fondamentali relativi ai sistemi di equazioni in due incognite, argomento che dovrebbe essere già ben noto al lettore.

## 1.1. Equazioni lineari in una o due incognite

La più generale equazione *lineare* (cioè di primo grado) *in un'incognita* è del tipo

$$ax = b \quad , \quad a \neq 0 .$$

Essa ammette sempre una e una sola soluzione:

$$x = \frac{b}{a} .$$

Se si prescinde dalla condizione  $a \neq 0$ , occorre distinguere tre casi nella valutazione delle soluzioni di un'equazione come quella considerata, e precisamente:

- $a \neq 0$ : l'equazione ha, come già detto, solo la soluzione  $b/a$ ;
- $a = 0 \wedge b \neq 0$ : l'equazione non ha alcuna soluzione;
- $a = 0 \wedge b = 0$ : l'equazione ammette infinite soluzioni (tutti i numeri reali).

È molto importante tenere conto dell'osservazione contenuta nelle righe precedenti, in particolare nella risoluzione di equazioni parametriche. Chiariamo il concetto con un esempio.

Discutere ed eventualmente risolvere l'equazione seguente:

$$(a^2 - 1)x = a + 1 .$$

Tenendo conto di quanto detto si conclude che:

- se  $a \neq \pm 1$ , l'equazione ha la sola soluzione  $x = (a + 1)/(a^2 - 1) = 1/(a - 1)$ ;
- se  $a = -1$ , l'equazione ha come soluzioni tutti i numeri reali;
- se  $a = 1$ , l'equazione non ha soluzioni.

La più generale equazione *lineare in due incognite* è del tipo

$$ax + by = c \quad , \quad (a, b) \neq (0, 0) .$$

La condizione sui parametri  $a$  e  $b$  si può leggere dicendo che essi non sono mai contemporaneamente nulli. Un'equazione come questa ha sempre infinite soluzioni: si tratta di tutte le coppie che si ottengono attribuendo ad una della due incognite un valore arbitrario e ricavando l'altra dall'equazione in una incognita rimanente (purchè il coefficiente di quest'altra incognita sia diverso da zero).

Per esempio l'equazione

$$2x + 3y = 1$$

ha come soluzioni le coppie  $(0, 1/3)$ ,  $(1/2, 0)$ ,  $(-1, 1)$ , ecc.

L'equazione, pensata in due incognite, con coefficiente della  $y$  uguale a 0,

$$3x = 1, \text{ ovvero } 3x + 0y = 1,$$

ha come soluzioni le coppie  $(1/3, 1)$ ,  $(1/3, 2)$ ,  $(1/3, -5)$ , ecc.

## 1.2. Sistemi di equazioni lineari in due incognite

Consideriamo ora una *sistema* di due equazioni lineari in due incognite:

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}.$$

Si dice *soluzione* del sistema una coppia di reali che sia soluzione comune della prima e della seconda equazione. Un sistema come quello proposto può avere:

- una sola soluzione (e allora si dice *determinato*);
- infinite soluzioni (e allora si dice *indeterminato*);
- nessuna soluzione (e allora si dice *incompatibile*, anche se qualcuno usa il termine *impossibile*, locuzione che mi pare impropria).

I sistemi che hanno soluzioni (una o infinite) si dicono genericamente *compatibili*.

Consideriamo alcuni esempi.

- $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$  : il sistema è compatibile e determinato, e ha come unica soluzione la coppia  $(1, -1)$ .
- $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 2 \end{cases}$  : il sistema è compatibile e indeterminato, e ha come soluzioni tutte le coppie  $(2t + 1, t) \forall t \in \mathbb{R}$ .
- $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 3 \end{cases}$  : il sistema è incompatibile.

La risoluzione di un sistema lineare di due equazioni in due incognite può avvenire in maniera elementare usando il cosiddetto *metodo di sostituzione*: si ricava un'incognita in una delle due equazioni e la si sostituisce nell'altra, ottenendo un'equazione in una sola incognita, facilmente risolvibile; a questo punto il gioco è fatto. Per completezza riporto i calcoli necessari a risolvere il primo dei sistemi appena visti.

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x - (1 - 2x) = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x = 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

### 1.3. Il metodo di Cramer

Un metodo alternativo di risoluzione dei sistemi, poco pratico nel caso in esame, ma di enorme importanza per quanto segue, è il *metodo di Cramer*.

Per semplificare il discorso conviene introdurre alcuni nuovi concetti.

**Definizione 1.1** (Matrice quadrata di ordine 2). *Una tabella di numeri reali con due righe e due colonne, indicata con uno dei simboli seguenti:*

$$\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \left[ \begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right],$$

*si chiama una matrice quadrata di ordine 2, o matrice  $2 \times 2$ .*

Avremo bisogno di considerare tabelle con più di due righe e più di due colonne e ci sarà utile avere un simbolo unico per queste tabelle: di solito si usa una lettera corsiva maiuscola, cioè si scrive (usando il simbolo con le parentesi tonde, come si farà sempre in seguito):

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

**Definizione 1.2** (Determinante di una matrice  $2 \times 2$ ). *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

*si chiama determinante di  $A$ , il numero  $ad - bc$ , indicato con uno dei seguenti simboli:*

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

**Definizione 1.3** (Matrice incompleta o matrice dei coefficienti). *Dato un sistema lineare di due equazioni in due incognite,*

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases},$$

la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

si chiama matrice dei coefficienti o matrice incompleta del sistema.

Per la risoluzione del sistema in questione vale il seguente

**Teorema 1.4.** *Il sistema lineare*

$$\begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases},$$

è determinato se, e soltanto se,

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

In questo caso la soluzione del sistema è

$$x = \frac{\begin{vmatrix} p & b \\ q & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & p \\ c & q \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$



## 1.4. Esercizi

Risolvi, sia con il metodo di Cramer che per sostituzione, i seguenti sistemi.

$$1. \begin{cases} 2x - y = 3 \\ x - 3y = 4 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x - 3y = 5 \\ 3x + 4y = 12 \end{cases}$$

Discuti e risolvi, applicando se possibile anche il metodo di Cramer, i seguenti sistemi.

$$3. \begin{cases} ax + y = 1 \\ x + ay = 3 \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x + (a - 1)y = -2 \\ x + ay = 4 \end{cases}$$



## 2 Matrici e operazioni tra matrici

In questo capitolo si propongono i concetti fondamentali della teoria delle matrici, limitatamente agli argomenti richiesti per le applicazioni alla geometria analitica del piano e dello spazio.

Le matrici giocano un ruolo essenziale in un gran numero di problemi: consentono infatti di scrivere complicate espressioni considerando tabelle anche molto grandi come un unico ente. In particolare sono cruciali nella risoluzione di sistemi lineari, nei quali la matrice dei coefficienti dà le informazioni necessarie alla risoluzione del sistema. Matrice è dunque *mater*, *matris*, fonte, origine, parte essenziale. Il nome fu introdotto da James Joseph Sylvester (1814-1897), matematico inglese.

## 2.1. Definizioni

**Definizione 2.1** (Matrice  $m \times n$ ). Una tabella di numeri reali con  $m$  righe ed  $n$  colonne, indicata con il simbolo seguente

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

si chiama una matrice  $m \times n$ . Se serve precisare il numero di righe e di colonne si può scrivere

$$A_{[m \times n]} \quad \text{oppure} \quad A_{m \times n} \quad \text{o semplicemente} \quad A_{m,n}.$$

I numeri  $a_{ij}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  si chiamano *elementi* della matrice e si usa scrivere

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

In alcuni casi, per evitare confusioni, si scrive  $a_{i,j}$  invece di  $a_{ij}$ .

Se  $m \neq n$  la matrice si dice *rettangolare*. Se  $m = n$  la matrice si dice *quadrata* e il comune numero di righe e di colonne si chiama *ordine* della matrice. Nelle matrici quadrate gli elementi  $a_{ii}$  costituiscono la *diagonale principale*. Se  $m = 1$  (una sola riga) la matrice si dice anche un *vettore riga*; se  $n = 1$  (una sola colonna) la matrice si dice anche un *vettore colonna*.

Due matrici  $A$  e  $B$ , con lo stesso numero  $m$  di righe e  $n$  di colonne, sono *uguali* se e soltanto se

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

**Definizione 2.2** (Matrice trasposta). Data una matrice  $A_{m,n}$ , la matrice  $n \times m$  ottenuta

da  $A$  scambiando le righe con le colonne si chiama la trasposta,  $A^T$ , di  $A$ :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Per esempio

$$\text{se } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{si ha } A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

In particolare la matrice trasposta di un vettore colonna è un vettore riga e viceversa. Poiché avremo spesso bisogno di utilizzare vettori colonna, questa osservazione può facilitare le scritture:

$$\text{invece di scrivere } A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}, \quad \text{si può scrivere } A = (1 \ 2 \ \dots \ n)^T.$$

Per evitare confusioni, se i vettori colonna sono rappresentati con la trasposta di un vettore riga si usano spesso delle virgole per separare i singoli elementi. I vettori colonna si indicano usualmente con lettere minuscole in grassetto o sormontate da una freccia:

$$\mathbf{v} = \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ \dots \ n)^T = (1, 2, \dots, n)^T.$$



### Casi particolari di matrici quadrate:

- *matrice simmetrica*:  $a_{ij} = a_{ji}$  (gli elementi sopra la diagonale principale sono uguali a quelli sotto la diagonale stessa);
- *matrice diagonale*:  $a_{ij} = 0$  se  $i \neq j$  (gli elementi fuori dalla diagonale principale sono nulli);
- *matrice triangolare superiore*: gli elementi sotto la diagonale principale sono nulli;
- *matrice triangolare inferiore*: gli elementi sopra la diagonale principale sono nulli;
- *matrice unità o matrice identica*: gli elementi della diagonale principale sono tutti uguali a 1, mentre gli altri sono nulli; essa sarà indicata con  $Id$  o semplicemente con  $I$ .

La matrice con tutti gli elementi nulli si chiama anche matrice nulla e si può indicare con  $O$ . La matrice i cui elementi sono gli opposti degli elementi di  $A$  si chiama opposta di  $A$  e si indica con  $-A$ .



## 2.2. Operazioni tra matrici

**Definizione 2.3** (Somma di matrici). *Date due matrici  $A$  e  $B$ , entrambe  $m \times n$ , si chiama somma di  $A$  e  $B$ ,  $A + B$ , la matrice  $C$  ottenuta sommando gli elementi corrispondenti:*

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}.$$

**Definizione 2.4** (Prodotto di una matrice per uno scalare). *Data una matrice  $A$  e un reale  $c$ , si chiama prodotto di  $A$  per  $c$  la matrice,  $cA$ , ottenuta moltiplicando per  $c$  tutti gli elementi di  $A$ :*

$$cA = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{pmatrix}.$$

Le operazioni ora introdotte godono delle seguenti proprietà, di immediata verifica:

- $(A + B) + C = A + (B + C)$ : proprietà associativa della somma;
- $A + B = B + A$ : proprietà commutativa della somma;
- $A + O = A$ : la matrice nulla è elemento neutro della somma;
- $A + (-A) = O$ : esistenza dell'opposto per la somma;
- $c(A + B) = cA + cB$ ;
- $(c + d)A = cA + dA$ ;
- $0A = O$ ;
- $-1A = -A$ .

**Definizione 2.5.** *Date due matrici  $A_{m,p}$  e  $B_{p,n}$  si chiama loro prodotto righe per colonne la matrice  $C_{m,n}$  i cui elementi  $c_{ij}$  sono ottenuti moltiplicando ordinatamente gli elementi*

della  $i$ -esima riga di  $A$  per la  $j$ -esima colonna di  $B$  e sommando i prodotti così ottenuti:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj}.$$

Si noti che la definizione ha senso solo se il numero di colonne della prima matrice è uguale al numero di righe della seconda. Questo significa che, in generale, dato il prodotto  $AB$ , non ha nemmeno senso considerare il prodotto  $BA$ .

Nel caso particolarmente importante di prodotto tra matrici quadrate, esse devono avere lo stesso ordine; in questo caso hanno sempre senso sia  $AB$  che  $BA$ , ma può benissimo succedere che  $AB \neq BA$ . Se  $AB = BA$  si dice che le matrici  $A$  e  $B$  *commutano*, altrimenti che *non commutano*.

### Esempi

1. Calcola il prodotto  $C = AB$  tra

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Si osserva intanto che  $A_{2,4}B_{4,3} = C_{2,3}$ ; poi si ha:

- $c_{11} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 1 = 10$  (prima riga  $\times$  prima colonna);
- $c_{12} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 3$  (prima riga  $\times$  seconda colonna);
- $c_{13} = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 2$  (prima riga  $\times$  terza colonna);
- $c_{21} = 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 3$  (seconda riga  $\times$  prima colonna);
- $c_{22} = 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$  (seconda riga  $\times$  seconda colonna);
- $c_{23} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-3) + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 7$  (seconda riga  $\times$  terza colonna).

La matrice prodotto è dunque:

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Verificare che le due matrici seguenti non commutano.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il prodotto tra matrici gode delle seguenti proprietà (si suppone che le operazioni indicate siano definite):

- $A(BC) = (AB)C$ : proprietà associativa del prodotto tra matrici;
- $A(B + C) = AB + AC$ ,  $(A + B)C = AC + BC$ : proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma;
- $c(AB) = (cA)B$ .

Nell'insieme delle matrici quadrate di ordine  $n$  vale anche la

- $AI = IA = A$ , proprietà che giustifica il nome di matrice unità data alla matrice  $I$ .

È molto importante invece il fatto che, nell'insieme delle matrici quadrate di ordine  $n$ , data una matrice  $A$ , in generale *non esiste* una matrice *inversa*, ovvero una matrice  $B$  tale che  $AB = BA = I$ . Le matrici che godono di questa proprietà si dicono invertibili. Si può provare che le matrici invertibili hanno una sola inversa.

### Esempio

Verifica se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

è invertibile e, in caso affermativo, calcolane l'inversa.

Si tratta di verificare se esiste una matrice

$$B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

tale che  $AB = BA = I$ . Si ottiene:

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2z & y + 2t \\ 2x - z & 2y - t \end{pmatrix}$$

Si deve dunque avere:

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2t = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 2y - t = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z = 1 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \wedge \begin{cases} y + 2t = 0 \\ 2y - t = 1 \end{cases}$$

La risoluzione dei due sistemi può essere fatta con la regola di Cramer e si ottiene:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{5}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2}{5}, \quad t = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = -\frac{1}{5}.$$

La matrice cercata esiste ed è:

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 2/5 \\ 2/5 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

È facile ora verificare che si ha non solo  $AB = I$ , ma anche  $BA = I$ .

La matrice inversa di una data matrice  $A$ , se esiste, si indica con

$$A^{-1}: AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

È molto importante la proprietà seguente: se  $A$  e  $B$  sono due matrici invertibili allora

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Come conseguenza della definizione di prodotto tra matrici, si possono definire anche le *potenze* di una matrice:

$$A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \quad \text{ecc.},$$

e si può convenire che

$$A^1 = A, \quad A^0 = I.$$

## 2.3. Determinante di una matrice quadrata

Daremo una definizione ricorsiva di determinante, basata su un teorema dovuto a Laplace: data la definizione per la matrici di ordine 1, la definizione per matrici di ordine superiore si riconduce, mediante passaggi successivi al caso  $n = 1$ . Ricordo che abbiamo già definito il determinante per una matrice di ordine 2: naturalmente la definizione che daremo comprenderà quella già nota come caso particolare.

Per il determinante di una matrice  $A$  useremo ancora le notazioni

$$|A| = \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix}.$$

**Definizione 2.6** (Minori di una matrice). *Data una matrice  $A$  si chiama sottomatrice di  $A$  ogni matrice ottenuta da  $A$  sopprimendo un certo numero di righe e un certo numero di colonne (anche non consecutive). Si chiama minore di  $A$  una sottomatrice quadrata di  $A$ . A volte si usa il termine minore anche per indicare il determinante del minore stesso.*

**Definizione 2.7** (Complemento algebrico o cofattore). *Dato un elemento  $a_{ij}$  di una matrice quadrata  $A$  si chiama suo complemento algebrico o cofattore, e si indica con  $A_{ij}$ , il determinante, moltiplicato per  $(-1)^{i+j}$ , del minore che si ottiene sopprimendo la riga e la colonna di  $A$  che si intersecano in  $a_{ij}$ ; questo minore è anche detto minore complementare*

di  $a_{ij}$ .

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j-1} & a_{m,j} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,j-1} & a_{m,j+1} & \cdots & a_{m,n} \end{vmatrix}$$

**Definizione 2.8** (Determinante). *Data una matrice quadrata  $A$  di ordine  $n$  e considerata una sua riga o colonna qualunque, il determinante di  $A$  è il numero ottenuto moltiplicando gli elementi della riga o colonna scelta per i rispettivi cofattori e sommando i risultati ottenuti:*

*data la riga  $r$ -esima di  $A$  si ha  $|A| = a_{r1}A_{r1} + a_{r2}A_{r2} + \cdots + a_{rn}A_{rn}$  ;*

*data la colonna  $p$ -esima di  $A$  si ha  $|A| = a_{1p}A_{1p} + a_{2p}A_{2p} + \cdots + a_{np}A_{np}$  .*

In sostanza, per calcolare il determinante una matrice di ordine  $n$  si devono calcolare  $n$  determinanti di matrici di ordine  $n - 1$ , per calcolare i quali si devono calcolare  $n - 1$  determinanti di matrici di ordine  $n - 2$ , e così via. Naturalmente si prova che nella definizione data la scelta della riga o colonna è ininfluente ai fini del risultato. È immediato che per

matrici di ordine 2 la definizione porge il già noto risultato:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

### Esempio

Calcola il determinante di

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Scegliendo la prima colonna, si ha

$$\begin{aligned} |A| &= 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (1 - 2) - 3 \cdot (2 + 1) - 2 \cdot (4 + 1) = -17. \end{aligned}$$

Valgono le seguenti proprietà del determinante.

- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$  (regola di Binet);
- se le matrici  $A$  e  $B$  differiscono solo per lo scambio di due linee parallele, allora  $\det(A) = -\det(B)$ ;
- se una matrice  $A$  ha due righe uguali o proporzionali, allora  $\det(A) = 0$ ;
- aggiungendo a una linea di una matrice  $A$  un'altra linea della matrice stessa, eventualmente moltiplicata per un numero, il determinante di  $A$  non cambia;
- moltiplicando una linea di  $A$  per un numero  $c$ , il determinante di  $A$  risulta moltiplicato per  $c$ .

## 2.4. Calcolo dell'inversa di una matrice

**Teorema 2.9** (Condizione di invertibilità di una matrice). *Una matrice quadrata  $A$  è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da 0.*

**Definizione 2.10** (Matrice aggiunta). *Data un matrice quadrata  $A$ , si chiama sua matrice aggiunta, e si indica con  $\text{agg}(A)$ , la matrice che ha come elementi i cofattori degli elementi della trasposta  $A^T$  di  $A$ .*

**Teorema 2.11** (Calcolo dell'inversa). *Data una matrice  $A$  con determinante diverso da 0, la sua matrice inversa è data da*

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{agg}(A).$$

### Esempio

Data

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

si trova  $|A| = -8 \neq 0$ , e

$$\text{agg}(A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ 3 & -2 & -1/2 \\ -12 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1/2 \\ -3/8 & 1/4 & 1/16 \\ 3/2 & 0 & -1/4 \end{pmatrix}.$$

## 2.5. Rango di una matrice

Data una matrice (in genere rettangolare)  $A_{m,n}$ , da essa possiamo estrarre minori di ordine  $1, 2, \dots, r$ , con  $1 \leq r \leq \min(m, n)$ .

**Definizione 2.12** (Rango). *Il rango di una matrice  $A_{m,n}$ ,  $\text{rg}(A)$ , è il massimo ordine dei suoi minori con determinante non nullo (brevemente il massimo ordine dei suoi minori non nulli).*

In sostanza la definizione data implica che se  $\text{rg}(A) = p$

- esiste almeno un minore di ordine  $p$  non nullo (cioè con determinante diverso da zero);
- tutti gli eventuali minori di ordine  $p + 1$  sono nulli.

Per la matrice nulla si pone  $\text{rg}(A) = 0$ . Se  $A$  è una matrice quadrata di ordine  $n$  allora

$$\text{rg}(A) = n \Leftrightarrow \det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \text{ è invertibile.}$$

### Esempio

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 5 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ -2 & 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

ha 4 minori di ordine 3, e precisamente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 6 & -2 & 4 \\ -2 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 6 & -2 & 3 \\ -2 & 6 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 6 & 4 & 3 \\ -2 & 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ -2 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix},$$

e tutti i loro determinanti sono nulli. Essa ha inoltre 18 minori di ordine 2 e si verifica subito che il minore

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

ha determinante diverso da 0. Se ne conclude che la matrice data ha rango 2.

## 2.6. Esercizi

1. Dimostra che  $(A + B)^T = A^T + B^T$ .
2. Dimostra che  $(cA)^T = cA^T$ .
3. Trova tutte le potenze della matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .
4. Date  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , verifica se

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

5. Calcola il determinante ed eventualmente l'inversa della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Calcola il rango della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$



## 3 Sistemi lineari

La risoluzione di sistemi di equazioni lineari in  $n$  incognite si fa generalizzando il metodo già visto per i sistemi di due equazioni in due incognite. Esistono altri metodi risolutivi, anche più efficienti dal punto di vista dei tempi di calcolo; tra essi molto importante il metodo di riduzione o eliminazione di Gauss. Qui ci occuperemo però unicamente del metodo di Cramer.

### 3.1. Definizioni

Un sistema di  $m$  equazioni lineari in  $n$  incognite è un sistema del tipo:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Esattamente come i sistemi di due equazioni in due incognite, un sistema di  $m$  equazioni in  $n$  incognite si dice

- *compatibile*, se ha soluzioni, e in questo caso si dice
  - *determinato*, se ha una sola soluzione,
  - *indeterminato*, se ha infinite soluzioni;
- *incompatibile*, se non ha soluzioni.

Si tenga ben presente che soluzione di un sistema in  $n$  incognite è un  $n$ -upla di numeri che sostituiti ordinatamente al posto delle incognite rendono vera ciascuna equazione del sistema. Quando si parla di *una sola* soluzione si intende dunque *una sola*  $n$ -upla.

La matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

è detta *matrice dei coefficienti*, o *matrice incompleta* del sistema. Se si considerano i vettori colonna

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad \mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T,$$

il sistema può essere scritto nella forma compatta

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

che è formalmente simile alla scrittura di un'equazione di primo grado in un'incognita,  $ax = b$ .

La matrice

$$A|b = \left( \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

ottenuta da  $A$  aggiungendo la colonna dei termini noti, è detta *matrice completa* del sistema.

### Osservazione su incognite e parametri

Nella risoluzione di un sistema di equazioni le  $x_i$  sono le incognite, cioè variabili appartenenti a un dato insieme (nel nostro caso l'insieme dei reali) e soggette alle condizioni espresse dalle equazioni stesse.

Capita frequentemente nelle applicazioni che i coefficienti  $a_{ij}$  non siano costanti (numeri reali "fissati"), ma che dipendano da una o più variabili, che però giocano il ruolo di parametri, cioè sono variabili *non* soggette ad alcuna condizione (tranne eventualmente quelle per l'esistenza).

È indispensabile prestare molta attenzione alla differenza tra incognite (che si potrebbero chiamare anche *variabili condizionate*) e parametri (ovvero *variabili non condizionate*). Chiariamo il fatto con un esempio. Nell'equazione "in  $x$ "

$$(t + 1)x = 3t,$$

$x$  è l'incognita,  $t$  è un parametro:  $t$  può assumere qualunque valore, mentre, una volta scelto  $t$ ,  $x$  deve essere scelto in modo da soddisfare l'equazione data. Se per esempio scelgo  $t = 1$ ,  $x$  deve necessariamente valere  $3/2$ ; se scelgo  $t = 2$ ,  $x$  deve necessariamente valere  $2$ , e così via. Risolvere un'equazione (o un sistema) con parametri significa risolverlo per ogni valore consentito del parametro. Naturalmente non si dovrà in generale risolvere esplicitamente l'equazione o il sistema dando ai parametri tutti i valori consentiti (cosa del resto impossibile

*L. Battaia*

Algebra lineare  
e geometria  
analitica

Indice



Pag. 30 di 107

visto che di solito le scelte possono essere infinite): si dovranno piuttosto esaminare solo alcuni casi tipo. Nell'esempio sopra riportato basterà considerare solo due casi:

$t = -1$ : l'equazione non ha alcuna soluzione;

$$t \neq -1: x = \frac{3t}{t+1}.$$

## 3.2. Risoluzione del sistema

Il teorema fondamentale sui sistemi lineari è quello di Rouché-Capelli, che fornisce una condizione sulla risolubilità basata unicamente sulle caratteristiche delle matrici  $A$  e  $A|b$ , estendendo quanto già detto a proposito dell'equazione  $ax = b$ , la cui risolubilità dipende dai valori di  $a$  e  $b$ .

**Teorema 3.1** (Rouché-Capelli). *Un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite è compatibile se e soltanto se le matrici incompleta e completa hanno lo stesso rango. Il valore comune di questo rango è detto rango del sistema.*

Una volta controllata la compatibilità del sistema si può procedere alla sua risoluzione seguendo il percorso che segue.

Consideriamo un sistema lineare di  $m$  equazioni in  $n$  incognite e supponiamo che il rango comune delle due matrici completa e incompleta sia  $r$  ( $\leq \min(m, n)$ ). Consideriamo inoltre il minore (di ordine  $r$ ) della matrice incompleta che abbiamo usato per determinarne il rango e che quindi ha determinante non nullo. Allora:

1. si sopprimono le eventuali equazioni le cui righe dei coefficienti non compaiono nel minore detto;
2. si portano a secondo membro i termini contenenti le eventuali incognite le cui colonne dei coefficienti non compaiono nel minore detto (queste incognite assumeranno il ruolo di parametri, cioè non saranno sottoposte ad alcuna condizione: potrebbe essere utile indicarle anche formalmente con un opportuno nome, di solito  $t, u, \dots$ );
3. si ottiene così un sistema quadrato di  $r$  equazioni in  $r$  incognite, che si risolve con la regola di Cramer che vedremo a breve e che estende quanto già detto per i sistemi di due equazioni in due incognite.

**Teorema 3.2** (Regola di Cramer). *Sia dato un sistema di  $r$  equazioni in  $r$  incognite, con matrice dei coefficienti,  $A$ , a determinante non nullo<sup>1</sup>. Si considerino inoltre le matrici  $A_i$*

<sup>1</sup>Un sistema siffatto è sicuramente compatibile in quanto la matrice completa, avendo le stesse righe di

ottenute sostituendo alla prima, seconda, ecc., colonna, la colonna dei termini noti. Si ha:

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

### Esempio e ulteriori considerazioni

Risolvere il sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \end{cases}.$$

La matrice  $A|b$  è:

$$A|b = \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right).$$

Con un po' di pazienza (e magari con un po' d'occhio nel semplificare la matrice!), si trova che il determinante di  $A$  è nullo, e così pure tutti quelli dei minori di ordine 4 della matrice completa. Stesso discorso per i minori di ordine 3, sia della matrice incompleta che di quella completa. Ci sono invece molti minori di ordine 2 della matrice incompleta che sono non nulli. Dunque il rango del sistema è 2. Scegliamo, per esempio, il minore

$$\begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix},$$

---

quella incompleta, non può avere rango maggiore di  $r$ , né, d'altro canto può avere rango minore di  $r$ , in quanto è una "sopramatrice" della matrice incompleta.

che ha determinante  $-6$ . La prima e la quarta equazione possono essere eliminate; i termini contenenti la prima e la quarta incognita si portano a secondo membro. Ponendo  $x_1 = t$  e  $x_4 = u$  si ottiene:

$$\begin{cases} 2x_3 = 1 - t + 2u \\ 3x_2 - x_3 = 4 - 4t - u \end{cases}.$$

Applicando la regola di Cramer si ha quindi:

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - t + 2u & 2 \\ 4 - 4t - u & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 - t + 2u \\ 3 & 4 - 4t - u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}, \quad x_4 = u,$$

ovvero

$$x_1 = t, \quad x_2 = \frac{3 - 3t}{2}, \quad x_3 = \frac{1 - t + 2u}{2}, \quad x_4 = u.$$

Le soluzioni dipendono da due parametri,  $t$  e  $u$ . Si usa esprimere questo fatto dicendo che il sistema ha

$\infty^2$  soluzioni.

In generale se un sistema in  $n$  incognite ha rango  $r$ , si dice che ha

$\infty^{n-r}$  soluzioni,

con la convenzione che, se  $n - r = 0$ , si intenda che il sistema ha una sola soluzione. Il numero  $n - r$  rappresenta, in un senso che qui non interessa precisare, la *dimensione* dello spazio delle soluzioni.

### 3.3. Esercizi

1. Discuti, al variare del parametro  $t$ , il seguente sistema e risolvi nei casi in cui è compatibile:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ tx_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - tx_3 = -1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \end{cases} .$$

2. Risolvi il seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = -2 \end{cases} .$$

3. Determina il polinomio

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d ,$$

in modo che

$$p(0) = 1, \quad p(1) = -2, \quad p(-1) = -6, \quad p(2) = 3 .$$

*L. Battaia*

Algebra lineare  
e geometria  
analitica

*Indice*



Pag. 35 di 107

## 4 Vettori nello spazio ordinario

## 4.1. Definizioni

Consideriamo nello spazio ordinario le coppie ordinate di punti  $(A, B)$ , ove  $A$  è detto primo estremo e  $B$  secondo estremo. Le coppie  $(A, B)$  sono anche dette *segmenti orientati* o *vettori applicati* e indicate con  $\overrightarrow{AB}$ , o con  $B - A$ <sup>1</sup>. A volte, se il discorso risulta chiaro dal contesto, si può anche scrivere semplicemente  $AB$ , anche se questa notazione è preferibilmente applicata ai segmenti ordinari della geometria euclidea. La lunghezza del segmento orientato  $\overrightarrow{AB}$  (rispetto ad una prefissata unità di misura) indica la distanza tra i punti  $A$  e  $B$  e si rappresenta con  $\|\overrightarrow{AB}\|$  o anche, più semplicemente, con  $\|AB\|$ . Per la lunghezza dei segmenti ordinari della geometria euclidea continuiamo a usare il simbolo tradizionale  $\overline{AB}$ , anche se a volte, quando il contesto rende chiaro il significato dei simboli, potremo usare semplicemente  $AB$ . La direzione della retta individuata da  $A$  e  $B$  si chiama direzione del segmento orientato  $\overrightarrow{AB}$ . Il segmento orientato individua anche, sulla retta  $AB$ , un verso: quello in cui  $A$  precede  $B$ .

Nell'insieme dei segmenti orientati si introduce una relazione di equivalenza, detta di *equipollenza*

$$\overrightarrow{AB} \text{ è equipollente a } \overrightarrow{CD}$$

se

- $\|AB\| = \|CD\|$ ;
- le rette  $AB$  e  $CD$  sono parallele;
- i versi di  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  sono uguali.

---

<sup>1</sup>La notazione  $B - A$  per indicare un segmento orientato è stata introdotta da William Rowan Hamilton (1805-1865), matematico irlandese. Si tratta di una notazione particolarmente felice e utile, come vedremo in seguito. Qui segnaliamo solo che la scrittura di un segmento orientato come *differenza di due punti* rende palese il diverso ruolo dei due estremi del segmento, esattamente come succede nella sottrazione ordinaria di numeri. Occorre tenere ben presente che da questa notazione non si può dedurre alcun concetto di somma di due punti:  $B - A$  ha un ben preciso significato, nessun significato si attribuisce alla scrittura  $B + A$ .

Un modo equivalente, e più compatto, per dare la definizione di equipollenza è il seguente:

$\overrightarrow{AB}$  è equipollente a  $\overrightarrow{CD}$  se i punti medi di  $AD$  e  $BC$  coincidono.

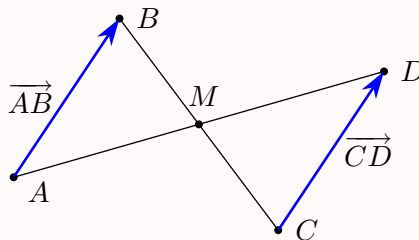


Figura 4.1: Segmenti orientati equipollenti

Trattandosi di una relazione di equivalenza, essa ripartisce l'insieme di tutti i segmenti orientati dello spazio in classi di equivalenza: come è d'uso, la classe di equivalenza individuata dal segmento orientato  $\overrightarrow{AB}$  è indicata con  $[\overrightarrow{AB}]$ .

Si dà ora la seguente definizione:

**Definizione 4.1** (Vettore). *Si chiama vettore libero o, semplicemente, vettore una classe di equivalenza di segmenti orientati equipollenti.*

I vettori saranno indicati con una lettera minuscola in grassetto, o sormontata da una freccia (come già fatto per le matrici ad una sola colonna, i vettori colonna, e vedremo in seguito il perché di questa coincidenza di notazioni), cioè si pone:

$$\mathbf{u} = \vec{u} = [\overrightarrow{AB}].$$

È evidente che se  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  sono segmenti orientati equipollenti, si avrà

$$\mathbf{u} = [\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{CD}].$$

Come è d'abitudine quando si lavora con classi di equivalenza, si può sempre considerare un elemento qualunque della classe stessa (un *rappresentante*) e operare direttamente con esso. Saranno dunque giustificate scritte del tipo:

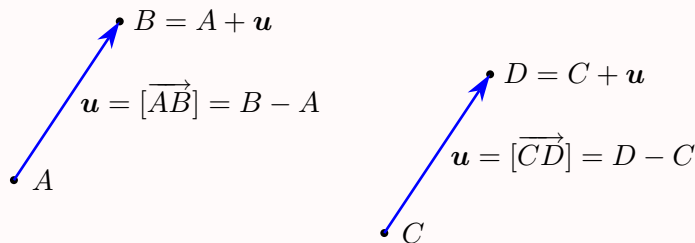
$$\mathbf{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD},$$

nella quale  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{CD}$  non sono pensati come segmenti orientati, ma come rappresentanti di classi di equivalenza.

Se poi si usa la notazione  $B - A$  per i segmenti orientati, si può scrivere anche  $\mathbf{u} = B - A$ , da cui si trae

$$B = A + \mathbf{u},$$

particolarmente significativa, in quanto precisa esattamente il significato profondo del concetto di vettore: il vettore  $\mathbf{u}$  determina una *traslazione* dello spazio, che porta ogni punto  $P$  nel punto  $Q$ , ottenuto trasladando  $P$  di un tratto uguale alla lunghezza di  $\mathbf{u}$ , nella direzione e verso di  $\mathbf{u}$ . È proprio da qui che deriva il nome: *vehere* significa infatti trasportare.



**Figura 4.2:** Vettori e traslazioni

I segmenti  $\overrightarrow{AA}$ ,  $\overrightarrow{BB}$ ,  $\dots$ , individuano il cosiddetto *vettore nullo*, indicato con  $\vec{0}$  o  $\mathbf{0}$ .

Indichiamo con  $\mathbf{V}_3$  l'insieme di tutti i vettori (liberi) dello spazio, con  $\mathbf{S}_3$  l'insieme di tutti i punti dello spazio. È facile costruire una corrispondenza biunivoca tra  $\mathbf{V}_3$  e  $\mathbf{S}_3$ : scelto un punto  $O$  dello spazio, basta associare ad ogni vettore  $\mathbf{v}$  il punto  $P = O + \mathbf{u}$ .

*L. Battaia*

Algebra lineare  
e geometria  
analitica

Indice



Pag. 39 di 107

Se invece di considerare i punti dello spazio, si considerano i punti di un piano  $\pi$ , si possono ripetere le stesse considerazioni, senza alcuna modifica. In questo caso si indicheranno con  $\mathbf{V}_2$  e  $\mathbf{S}_2$  rispettivamente i vettori e i punti del piano. Analogo discorso per i punti e i vettori di una retta, dove si useranno i simboli  $\mathbf{V}_1$  e  $\mathbf{S}_1$ , con ovvio significato.

## 4.2. Operazioni lineari tra vettori

Nell'insieme  $\mathbf{V}_3$  dei vettori dello spazio si possono introdurre le operazioni di somma e prodotto per un numero. Per quanto riguarda la somma si possono dare due definizioni, perfettamente equivalenti.

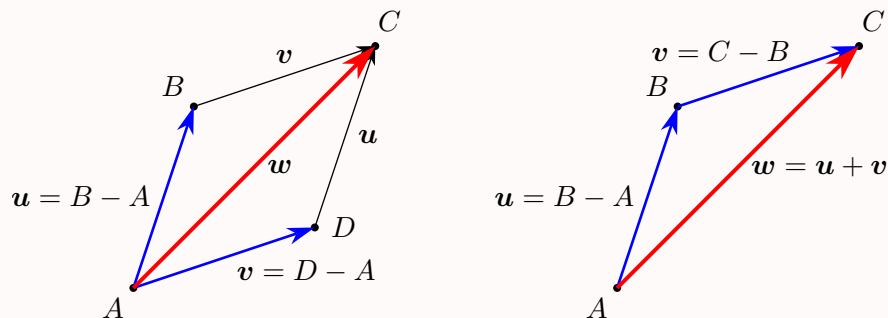
**Definizione 4.2** (Regola del parallelogramma). *Dati due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , e considerati due rappresentanti aventi la stessa origine  $A$ ,  $\mathbf{u} = B - A$  e  $\mathbf{v} = D - A$ , si ha  $D + \mathbf{u} = B + \mathbf{v}$ . Posto  $C = D + \mathbf{u} = B + \mathbf{v}$ , si dice somma dei vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  il vettore  $\mathbf{w}$*

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = C - A.$$

**Definizione 4.3** (Regola del “testa-coda”). *Dati due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , e considerati due rappresentanti  $\mathbf{u} = B - A$  e  $\mathbf{v} = C - B$ , si dice somma dei vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  il vettore  $\mathbf{w}$*

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = C - A.$$

Naturalmente, in entrambi i casi, si prova che la scelta dei rappresentanti è ininfluente ai fini del risultato.



**Figura 4.3:** Somma di vettori: regola del parallelogramma e regola del “testa-coda”

**Definizione 4.4** (Opposto). Dato un vettore  $\mathbf{u} = B - A$  si chiama suo opposto il vettore

$$-\mathbf{u} = A - B,$$

cioè il vettore che ha lo stesso modulo, la stessa direzione e verso opposto.

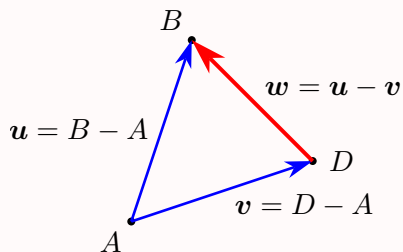
**Definizione 4.5** (Differenza di due vettori). Dati due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , si chiama loro differenza il vettore

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{u} - \mathbf{v}.$$

Se  $\mathbf{u} = B - A$  e  $\mathbf{v} = D - A$ , si ha  $-\mathbf{v} = A - D$ , da cui

$$\mathbf{u} - \mathbf{v} = (B - A) + (A - D) = (B - A) - (D - A) = B - D.$$

Anche se nella precedente uguaglianza non si devono sciogliere le parentesi applicando le usuali regole dei segni (si otterrebbe una somma di punti che non abbiamo definito), tutto funziona come se si “semplificasse il punto  $A$ ”.



**Figura 4.4:** Differenza di vettori

**Definizione 4.6** (Prodotto di un vettore per un numero). Dato un vettore  $\mathbf{u}$  e un numero reale  $\lambda$ , si chiama prodotto del vettore  $\mathbf{u}$  per  $\lambda$  il vettore  $\mathbf{w}$  così definito:

1. se  $\lambda = 0$  oppure  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ;

2. se  $\lambda \neq 0$  e  $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{w} = \lambda\mathbf{u}$  è il vettore che ha

- modulo uguale al modulo di  $\lambda$  per il modulo di  $\mathbf{u}$ ,  $\|\lambda\mathbf{u}\| = |\lambda|\|\mathbf{u}\|$ ;
- direzione uguale a quella di  $\mathbf{u}$ ;
- verso concorde o discorde a quello di  $\mathbf{u}$  a seconda che  $\lambda$  sia positivo o negativo.

Le operazioni di somma e prodotto per un numero appena introdotte godono delle seguenti proprietà, per ogni  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$  e per ogni  $\lambda$ ,  $\mu$ :

1.  $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w})$ : proprietà associativa della somma;
2.  $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ : esistenza dell'elemento neutro della somma;
3.  $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ : esistenza dell'opposto;
4.  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ : proprietà commutativa della somma;
5.  $\lambda(\mu\mathbf{u}) = (\lambda\mu)\mathbf{u}$ ;
6.  $(\lambda + \mu)\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{u}$ ;
7.  $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ ;
8.  $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$ ;
9.  $-1\mathbf{u} = -\mathbf{u}$ ;
10.  $0\mathbf{u} = \mathbf{0}$ .

Si noti che l'operazione di somma tra due vettori è un'operazione interna nell'insieme  $\mathbf{V}_3$ : a una coppia di vettori fa corrispondere un terzo vettore; per contro l'operazione di prodotto per un numero è un'operazione esterna: ad una coppia costituita da un numero e un vettore fa corrispondere un vettore.

L'insieme  $\mathbf{V}_3$  con le operazioni ora introdotte è un esempio di una struttura algebrica di grande importanza in tutte le applicazioni, detta

*Spazio vettoriale.*

**Definizione 4.7** (Combinazione lineare di vettori). *Dati  $n$  vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  e  $n$  numeri reali  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , si chiama combinazione lineare dei vettori dati, con coefficienti i numeri reali dati, il vettore*

$$\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_n\mathbf{v}_n.$$

È facile provare che, nel caso di due soli vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , detta  $\mathbf{w}$  una loro combinazione lineare arbitraria, e considerato un punto  $O$  dello spazio, il punto  $P = O + \mathbf{w}$  è sempre coplanare con  $O$ ,  $A = O + \mathbf{u}$  e  $B = O + \mathbf{v}$ . Se poi  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono paralleli, i quattro punti considerati sono addirittura allineati.

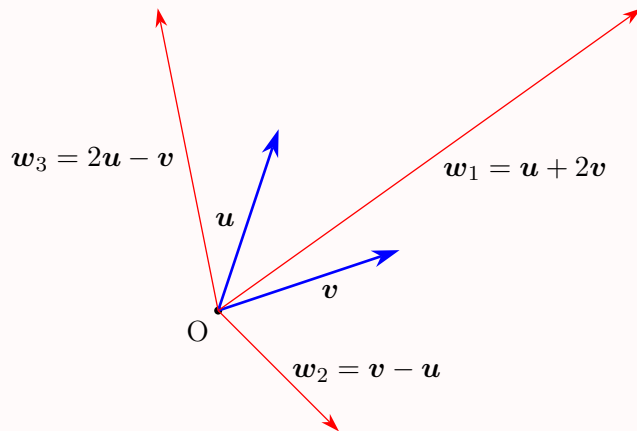
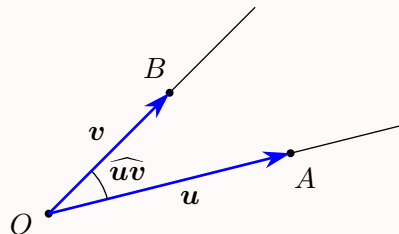


Figura 4.5: *Combinazioni lineari di due vettori*

## 4.3. Prodotto scalare

Dati due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  e un punto  $O$ , consideriamo i punti  $A = O + \mathbf{u}$  e  $B = O + \mathbf{v}$ . Si chiama *angolo* tra i due vettori l'angolo convesso (eventualmente piatto) individuato dalle semirette  $OA$  e  $OB$ .



**Figura 4.6:** Angolo tra due vettori

Consideriamo di nuovo due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , un punto  $O$  e i punti  $A = O + \mathbf{u}$  e  $B = O + \mathbf{v}$ . Indicheremo con  $A'$  la proiezione ortogonale di  $A$  sulla retta  $OB$  e con  $B'$  la proiezione ortogonale di  $B$  sulla retta  $OA$ . Si può facilmente provare che

- $A'$  e  $B'$  stanno sulla semiretta  $OB$  e  $OA$ , rispettivamente, se  $\widehat{uv} < \pi/2$ ;
- $A'$  e  $B'$  coincidono con  $O$  se  $\widehat{uv} = \pi/2$ ;
- $A'$  e  $B'$  stanno sulle semirette opposte a  $OB$  e  $OA$ , rispettivamente, se  $\widehat{uv} > \pi/2$ .

**Definizione 4.8** (Proiezione di un vettore su un altro). *Le lunghezze dei segmenti  $OA'$  e  $OB'$ , prese col segno  $+$  o  $-$  a seconda che  $\widehat{uv} < \pi/2$  oppure  $\pi/2 < \widehat{uv} \leq \pi$  si chiamano proiezioni di  $\mathbf{u}$  su  $\mathbf{v}$  (rispettivamente di  $\mathbf{v}$  su  $\mathbf{u}$ ), e si indicano con  $u_v$  e  $v_u$  rispettivamente.*

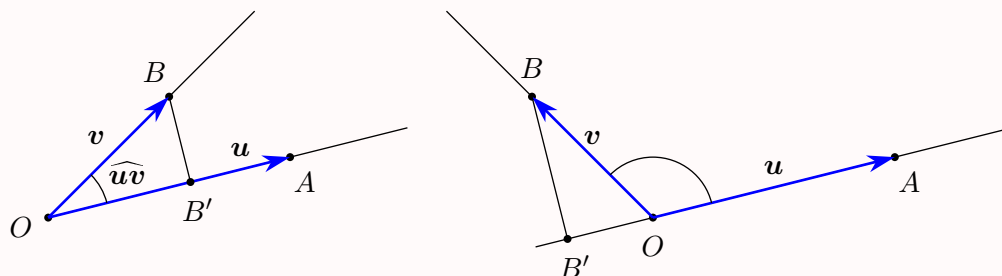


Figura 4.7: Proiezione di un vettore su un altro

**Definizione 4.9** (Prodotto scalare di due vettori). Dati due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ , si chiama loro prodotto scalare, e si indica con

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v},$$

il numero reale definito in uno dei seguenti tre modi equivalenti:

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot \|\mathbf{v}\| \cdot \cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}).$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{u}\| \cdot v_u.$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\| \cdot u_v.$

Il prodotto scalare di due vettori non nulli è nullo se e soltanto se i due vettori sono ortogonali.

**Osservazione 4.10** (Notazioni sul prodotto scalare). Sono in uso diverse notazioni per il prodotto scalare, oltre a quella qui adottata. Tra le altre citiamo:

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad \langle \mathbf{u} | \mathbf{v} \rangle.$$

La prima di queste è da sconsigliare in quanto, in particolare nei testi americani, è utilizzata per il prodotto vettoriale, che definiremo tra poco. L'ultima è particolarmente usata dai



fisici nei testi di meccanica quantistica, ed è nota come notazione di Dirac: la parte sinistra del simbolo,  $\langle \mathbf{u} |$ , si chiama *vettore bra*, la parte di destra,  $|\mathbf{v}\rangle$ , *vettore ket*, il simbolo completo (che denota in generale uno stato), si chiama *bracket*.

Il prodotto scalare gode delle seguenti proprietà, per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  e per ogni  $\lambda$ :

- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ : proprietà commutativa;
- $(\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$
- $\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$ : proprietà distributiva;
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0 \Leftrightarrow \mathbf{u} \perp \mathbf{v}$  (con la convenzione che un vettore nullo possa essere considerato perpendicolare a ogni altro vettore). Naturalmente parlando di perpendicolarità tra due vettori intendiamo riferirci a due rappresentanti dei vettori aventi la stessa origine.

Si noti che l'operazione di prodotto scalare è un'operazione esterna nell'insieme  $\mathbf{V}_3$ : ad una coppia di vettori fa corrispondere un numero reale.

## 4.4. Prodotto vettoriale

La definizione di prodotto vettoriale non è così semplice come le altre tre operazioni introdotte nell'insieme dei vettori dello spazio e richiede l'uso di un concetto (quello di *verso orario* o *antiorario*) di non facile spiegazione formale, anche se intuitivamente evidente. daremo quindi solo una definizione "elementare" di questa importante operazione.

È però molto importante segnalare subito una differenza fondamentale con le operazioni precedenti, in particolare le operazioni lineari: una combinazione lineare di due vettori paralleli è ancora un vettore parallelo ai dati, una combinazione lineare di due vettori è un vettore complanare ai vettori dati. Ciò significa, come abbiamo già osservato, che si potrebbe anche operare, senza cambiare nulla, in  $\mathbf{V}_1$  o  $\mathbf{V}_2$ , anziché in  $\mathbf{V}_3$ . Il prodotto vettoriale, come noi lo definiremo, è invece una operazione *intrinsecamente tridimensionale*, cioè non ha senso in  $\mathbf{V}_1$  o  $\mathbf{V}_2$ .

**Definizione 4.11** (Prodotto vettoriale o esterno). *Dati due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  si dice loro prodotto vettoriale o esterno il vettore  $\mathbf{w}$ , che si indica con  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$ , e si legge  $\mathbf{u}$  vettore  $\mathbf{v}$  o  $\mathbf{u}$  esterno  $\mathbf{v}$ , definito come segue:*

- se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  sono paralleli  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$ ;
- se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  non sono paralleli
  - il suo modulo è dato da  $\|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}\| = \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \sin \widehat{uv}$
  - la direzione è perpendicolare sia a  $\mathbf{u}$  che a  $\mathbf{v}$ ;
  - il verso è quello di avanzamento di una vite detrorsa (cavatappi) che ruoti nel senso in cui  $\mathbf{u}$  ruota per sovrapporsi a  $\mathbf{v}$ , compiendo il minimo angolo.

È immediato che il modulo di  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}$  è uguale all'area del parallelogramma di lati consecutivi  $AB$  e  $AC$ , dove  $A$  è un punto qualunque e  $B = A + \mathbf{u}$  e  $C = A + \mathbf{v}$ . Per quanto riguarda il verso si può anche, in maniera equivalente (ma sempre un po' azzardata dal punto di vista del rigore), dire che il verso è quello testa-piedi di un osservatore che, posto sul piano per i punti  $A, B, C$  appena considerati, veda la minima rotazione di  $\mathbf{u}$  per sovrapporsi a  $\mathbf{v}$

avvenire in senso antiorario, oppure ancora è il verso indicato dal pollice della mano destra se il palmo della stessa mano compie la minima rotazione che porta  $\mathbf{u}$  a sovrapporsi a  $\mathbf{v}$ .

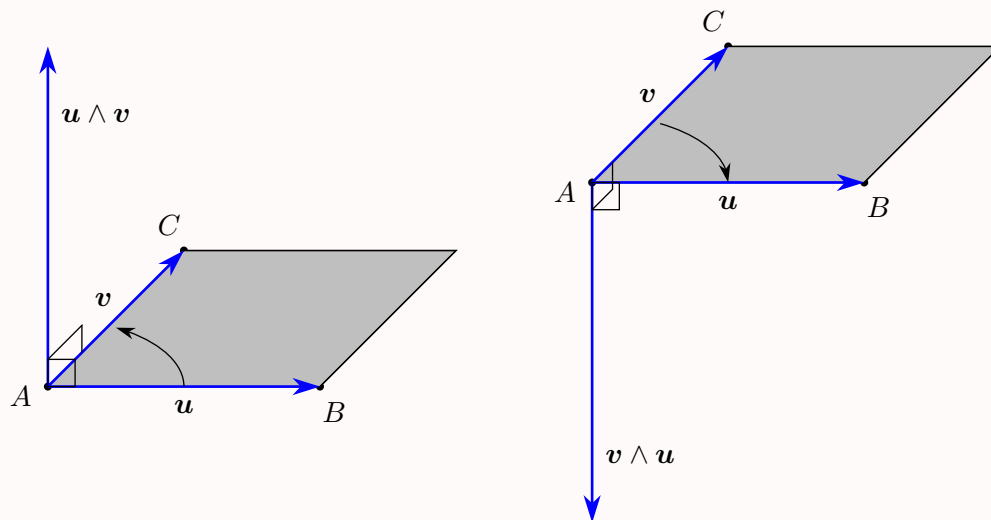


Figura 4.8: Prodotto vettoriale di due vettori

Il prodotto vettoriale di due vettori gode delle seguenti proprietà, per ogni  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$  e per ogni  $\lambda$ :

- $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$ : proprietà anticommutativa;
- $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{w} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ : proprietà distributiva;
- $\mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} + \mathbf{u} \wedge \mathbf{w}$ : proprietà distributiva;
- $(\lambda \mathbf{u}) \wedge \mathbf{v} = \mathbf{u} \wedge (\lambda \mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v})$ ;
- $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{u} \parallel \mathbf{v}$  (con la convenzione che un vettore nullo possa essere considerato parallelo a ogni altro vettore).

Si noti che l'operazione di prodotto vettoriale è un'operazione interna all'insieme  $\mathbf{V}_3$ : ad una coppia di vettori fa corrispondere un terzo vettore.

Si tenga presente che la notazione qui adottata per il prodotto vettoriale non è l'unica possibile. In particolare nei testi americani è più diffusa la notazione  $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ . Poiché la stessa notazione è invece, come già detto, usata a volte per il prodotto scalare di due vettori, ritengo meglio evitarla del tutto, a scampo di equivoci. In ogni caso, leggendo un testo, è sempre bene controllare le notazioni usate, o consultando l'apposita tabella (se presente), oppure controllando le convenzioni usate in occasione del primo uso di un simbolo.

È molto importante prestare attenzione al fatto che il prodotto vettoriale non gode della proprietà associativa, per cui, a esempio, dati tre vettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ , in generale

$$(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \wedge \mathbf{w} \neq \mathbf{u} \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}).$$

Un'espressione del tipo di quelle considerate si chiama un *doppio prodotto vettoriale*. La non associatività del prodotto vettoriale risulta chiaramente dalla figura 4.9, dove sono state evidenziate anche le coordinate dei punti, per rendere la figura stessa più leggibile.

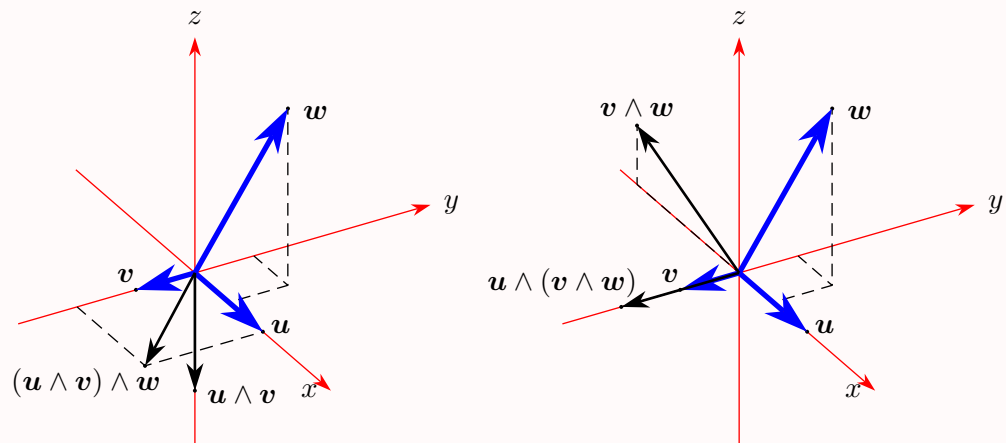


Figura 4.9: Doppio prodotto vettoriale di tre vettori

## 4.5. Prodotto misto

Dati tre vettori  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{w}$ , e considerato il prodotto vettoriale,  $\mathbf{z}$ , di due dei tre, ha senso calcolare il prodotto scalare di  $\mathbf{z}$  con il terzo vettore, per esempio  $(\mathbf{u} \wedge \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$ . In considerazione delle caratteristiche dei due prodotti, le parentesi sono inutili: nella scrittura  $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$  si deve eseguire prima il prodotto vettoriale e poi quello scalare, altrimenti la scrittura sarebbe priva di senso.

Si prova facilmente che il modulo del prodotto misto di tre vettori uguaglia il volume del prisma costruito sui tre vettori, come nella figura 4.10: basta solo tenere conto che il prodotto vettoriale ha per modulo l'area del parallelogramma “di base”, mentre il successivo prodotto scalare (a parte il segno) rappresenta il prodotto tra questa area di base e l'altezza.

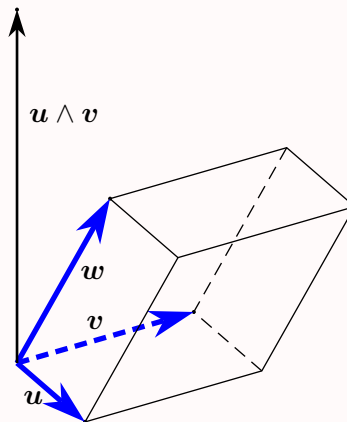


Figura 4.10: Prodotto misto di tre vettori

Dal fatto che il prodotto misto rappresenta, a meno del segno, il volume del prisma costruito sui tre vettori si possono dedurre le seguenti proprietà:



- il modulo del prodotto misto non dipende dall'ordine in cui i vettori sono scritti, nè dall'ordine in cui si eseguono i due prodotti, ovvero

$$|\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w}| = |\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}| = |\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} \wedge \mathbf{v}| = \dots;$$

- il prodotto misto è nullo se e solo se i tre vettori sono complanari, con la convenzione di considerare complanari tre vettori di cui uno o più siano nulli. Naturalmente parlando di complanarità di tre vettori intendiamo riferirci a tre rappresentanti dei vettori che abbiano la stessa origine.



## 4.6. Parallelismo, perpendicolarità, complanarità

Considerata l'importanza dei concetti di parallelismo, perpendicolarità, complanarità, richiamiamo qui le relazioni, già menzionate, che intercorrono tra essi e le operazioni tra vettori.

- Due vettori sono *paralleli* se e soltanto se il loro *prodotto vettoriale* è nullo.
- Due vettori sono *perpendicolari* se e soltanto se il loro *prodotto scalare* è nullo.
- Tre vettori sono *complanari* se e soltanto se il loro *prodotto misto* è nullo.

In tutti i casi si comprende la possibilità che uno o più dei vettori sia nullo, con la convenzione che il vettore nullo sia parallelo oppure perpendicolare a ogni altro vettore, e che sia complanare a ogni altra coppia di vettori.

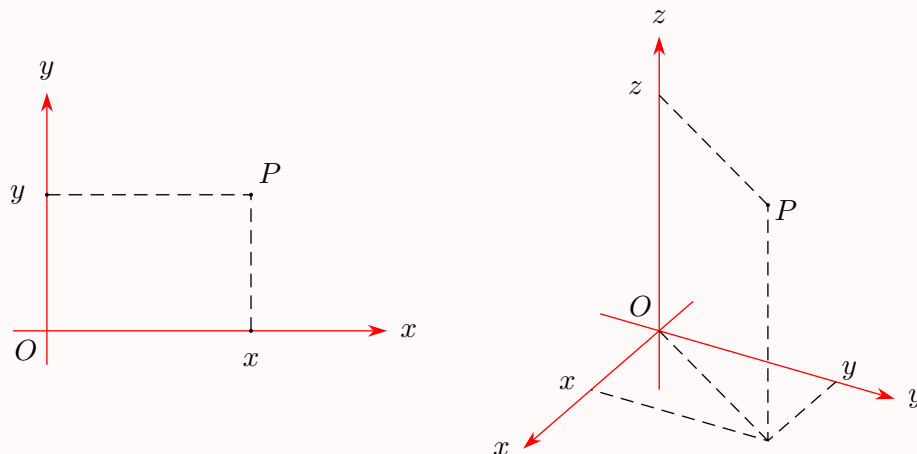
Vedremo come la verifica del parallelismo, perpendicolarità, o complanarità di rette e piani si faccia proprio tenendo conto di queste proprietà.



## 5 Coordinate cartesiane, vettori e componenti

## 5.1. Coordinate cartesiane di punti nel piano e nello spazio

Lo studio dei concetti fondamentali della geometria analitica dello spazio si può fare con le stesse tecniche che si usano per la geometria analitica del piano. Vale la pena, secondo me, introdurre direttamente almeno i concetti fondamentali direttamente nello spazio, soprattutto se si usano i metodi dell'algebra vettoriale, e poi particolarizzare le cose sul piano. Naturalmente un discorso diverso si applica allo studio delle figure geometriche fondamentali, quando converrà trattare separatamente il caso di due da quello di tre dimensioni (ricordiamo che a livello di scuola media superiore si tratta quasi esclusivamente il caso di due dimensioni).



**Figura 5.1:** Coordinate cartesiane di un punto nel piano e nello spazio

Nello spazio ordinario  $S_3$  si può introdurre un *Sistema di coordinate cartesiane* conside-

rando 3 rette non complanari passanti per uno stesso punto  $O$ . Tutte le proprietà metriche (cioè quelle che riguardano lunghezze, distanze, ecc.) si esprimono in maniera più semplice se le tre rette sono ortogonali, e in questo caso si parla di coordinate cartesiane *ortogonali*. Su ciascuna delle tre rette si sceglie un'unità di misura e un verso e, quindi, un sistema di ascisse. Per ragioni di semplicità si sceglie di solito la stessa unità sulle tre rette e allora si parla di sistema cartesiano *monometrico*. Nel seguito useremo sempre un sistema *cartesiano ortogonale e monometrico*. Il punto di intersezione delle tre rette si chiama *origine* del sistema di coordinate. Le tre rette, dette anche *assi*, si indicano con  $O_x, O_y, O_z$ , o, semplicemente con  $x, y, z$ , se non ci sono possibilità di equivoci. I piani  $O_{xy}, O_{xz}, O_{yz}$ , o, semplicemente,  $xy, xz, yz$ , si chiamano piani coordinati. Naturalmente nel piano bastano solo due assi e in questo caso l'asse  $O_x$  si chiama anche *asse delle ascisse*, l'asse  $O_y$  *asse delle ordinate*. Un sistema del tipo detto si indica con  $Oxy$  nel piano e con  $Oxyz$  nello spazio.

Una volta scelto il sistema  $Oxyz$ , ad ogni punto  $P$  dello spazio si può far corrispondere una terna di numeri reali (una coppia nel piano), con la costruzione indicata in figura 5.1.

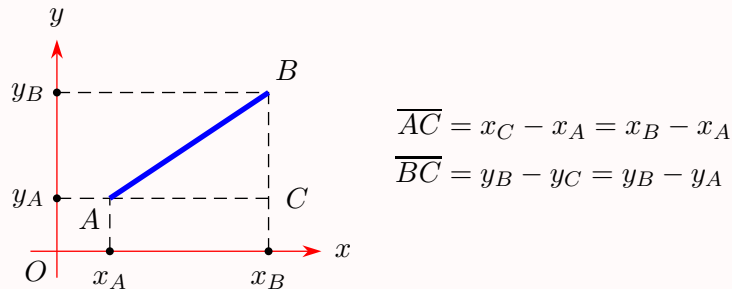
Per indicare le coordinate del punto  $P$  si scrive  $P = (x, y, z)$  ( $P = (x, y)$  nel piano).

## 5.2. Le formule fondamentali della geometria analitica del piano e dello spazio

Dati, nello spazio riferito al sistema  $Oxyz$ , due punti  $A(x_A, y_A, z_A)$  e  $B(x_B, y_B, z_B)$ , la *distanza tra i due punti*  $AB$  (nell'ipotesi che il sistema di coordinate cartesiane sia ortogonale e monometrico) è data da

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Nel piano basteranno ovviamente due coordinate, ma la formula rimane identica. Poiché questa formula è legata all'applicazione del teorema di Pitagora, la ortogonalità del sistema di coordinate è essenziale. Lo si può agevolmente controllare nel piano, con riferimento alla figura 5.2, ma la situazione è identica nello spazio.



**Figura 5.2:** Distanza tra due punti e teorema di Pitagora

Le coordinate del *punto medio*  $M$  del segmento  $AB$  sono invece date dalla media delle coordinate degli estremi:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}, \quad z_M = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

*L. Battaia*

Algebra lineare  
e geometria  
analitica

Indice



Pag. 58 di 107

Tra le formule fondamentali riportiamo anche quella del *baricentro*  $G$  di un triangolo di vertici  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$ ,  $C(x_C, y_C, z_C)$ , che è sempre dato dalla media delle coordinate degli estremi:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \quad z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

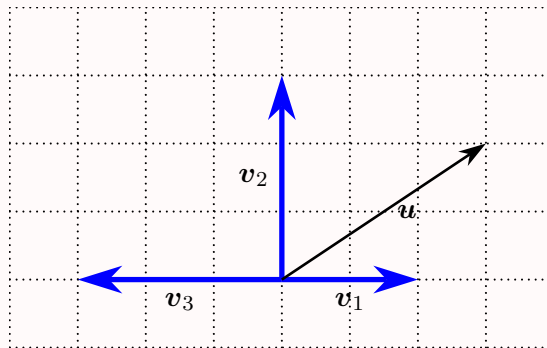


## 5.3. Componenti di vettori nel piano e nello spazio

Al sistema  $Oxyz$  si può associare una *base* dello spazio  $\mathbf{V}_3$  dei vettori, nel senso e con le modalità che ora indicheremo.

Abbiamo già considerato, nella def.4.7, la *combinazione lineare* di più vettori. Ci poniamo ora il problema inverso: dati  $n$  vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  è in generale possibile esprimere un arbitrario vettore  $\mathbf{u}$  come loro combinazione lineare? In caso affermativo i coefficienti della combinazione sono unici o no?. La risposta è negativa in entrambi i casi, come si può vedere sui due esempi che seguono.

1. Se i vettori dati sono solo due,  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , e non sono paralleli, consideriamo un punto  $A$  e il piano passante per  $A$ ,  $B = A + \mathbf{v}_1$ ,  $C = A + \mathbf{v}_2$ . Sappiamo già che se  $\mathbf{u}$  è una qualunque combinazione lineare di  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , il punto  $D = A + \mathbf{u}$  è complanare con  $A, B, C$ ; dunque un vettore  $\mathbf{w} = E - A$ , con  $E$  non complanare con  $A, B, C$ , non potrà essere combinazione lineare di  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ .
2. Se i vettori dati sono tre,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ , e sono complanari, è facile provare che ogni altro vettore  $\mathbf{u}$  complanare con i tre si può esprimere in infiniti modi come combinazione lineare dei tre vettori dati. In altri termini si può dire che  $u$  si può *decomporre* in infiniti modi nella somma di tre vettori paralleli ai tre vettori dati. Si veda la figura 5.3.



**Figura 5.3:** Non unicità della scomposizione di un vettore

Servendosi anche della griglia presente nella figura 5.3 è facile provare che si ha, per esempio:

$$\mathbf{u} = \frac{3}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 = 0\mathbf{v}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = -3\mathbf{v}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{v}_2 - 3\mathbf{v}_3.$$

In generale non è difficile provare che se si considerano, nel piano, due vettori non paralleli oppure, nello spazio, tre vettori non complanari, ogni vettore rispettivamente del piano o dello spazio è *esprimibile in maniera unica* come lo combinazione lineare. Un tal insieme di vettori si chiama una base, rispettivamente per  $\mathbf{V}_2$  o per  $\mathbf{V}_3$ . Si dà cioè la seguente

**Definizione 5.1** (Base per  $\mathbf{V}_2$  o per  $\mathbf{V}_3$ ). *Un insieme di vettori, rispettivamente di  $\mathbf{V}_2$  o  $\mathbf{V}_3$ , è una base per  $\mathbf{V}_2$  o  $\mathbf{V}_3$  se ogni altro vettore  $\mathbf{u}$  di  $\mathbf{V}_2$  o, rispettivamente,  $\mathbf{V}_3$  può essere espresso come loro combinazione lineare in maniera unica.*

*Una base di  $\mathbf{V}_2$  è necessariamente costituita da 2 vettori non paralleli. Una base di  $\mathbf{V}_3$  è necessariamente costituita da 3 vettori non complanari.*

Dunque:

— In  $\mathbf{V}_2$  dati 2 vettori  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , per ogni altro vettore  $\mathbf{u}$  vale la scomposizione

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2.$$

— In  $\mathbf{V}_3$  dati 3 vettori  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ , per ogni altro vettore  $\mathbf{u}$  vale la scomposizione

$$\mathbf{u} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \lambda_3 \mathbf{v}_3.$$

I numeri  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  si chiamano *coordinate* o *componenti* del vettore  $\mathbf{u}$  rispetto alla base data; i vettori  $\lambda_1 \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2, \lambda_3 \mathbf{v}_3$  si chiamano *vettori componenti* del vettore  $\mathbf{u}$  rispetto alla base data. Si scrive anche  $\mathbf{u} = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ .

Se nello spazio  $\mathbf{S}_3$  è dato un sistema di coordinate cartesiane ortogonali monometrico, si può, in maniera naturale, associare a esso una base di  $\mathbf{V}_3$ , scegliendo tre vettori di modulo 1, paralleli ed equiversi ai tre assi coordinati. Tre vettori come quelli indicati si indicano di solito con  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , o anche  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$  o, ancora,  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ .

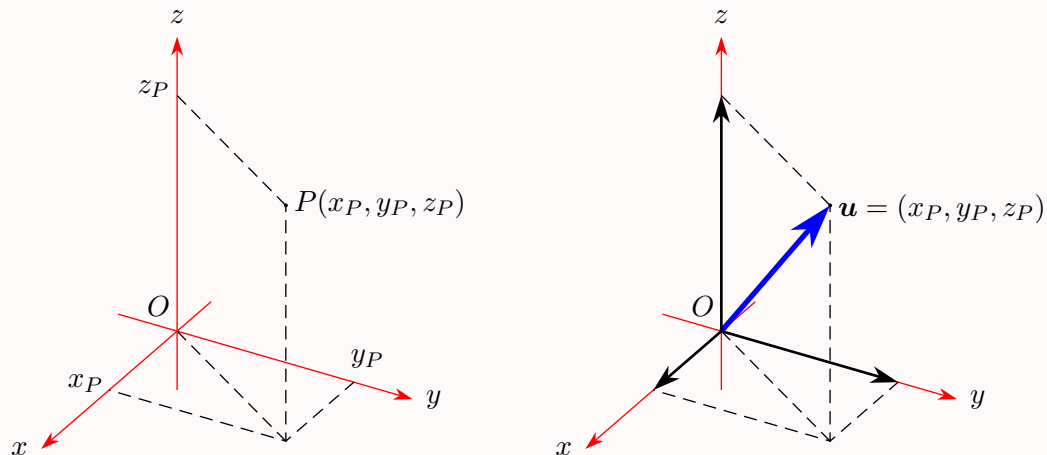
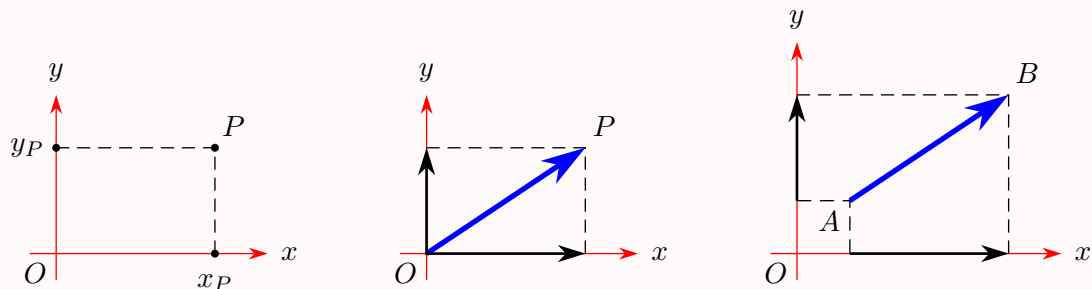


Figura 5.4: Coordinate cartesiane di un punto e componenti di un vettore



**Figura 5.5:** *Coordinate di punti e componenti di vettori, nel piano*

Facendo una scelta come questa si ha la seguente importante conseguenza, di facile verifica:

**Teorema 5.2** (Componenti dei vettori e coordinate dei punti). *Dato nello spazio un sistema cartesiano ortogonale monometrico  $Oxyz$  e considerata la base  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  di  $\mathbf{V}_3$  naturalmente associata a esso, le componenti di ogni vettore  $\mathbf{u}$  e le coordinate del punto  $P = O + \mathbf{u}$  coincidono: se  $P = (x_P, y_P, z_P)$  anche  $\mathbf{u} = (x_P, y_P, z_P)$ .*

*Considerati poi un punto  $A$  arbitrario e il punto  $B = A + \mathbf{u}$ , si ha*

$$\mathbf{u} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A),$$

*con ovvio significato dei simboli.*

In  $\mathbf{S}_2$  e  $\mathbf{V}_2$  valgono considerazioni identiche, con una coordinata in meno.

L'introduzione delle componenti facilita grandemente la trattazione di tutti i problemi connessi ai vettori: come vedremo, le operazioni introdotte sui vettori possono essere eseguite lavorando direttamente sulle componenti. Inoltre l'uso delle componenti consente facili

generalizzazioni dei concetti introdotti nello spazio ordinario a casi di spazi con un numero arbitrario di dimensioni.

**Osservazione 5.3** (Coordinate, componenti, vettori riga e vettori colonna). I concetti di coordinate di un punto e di componenti di un vettore ci hanno permesso di associare ai punti dello spazio e ai vettori liberi *terne* di numeri reali. Vedremo fra breve che le ordinarie operazioni tra vettori si possono eseguire mediante operazioni sulle terne, come fatto nelle operazioni tra matrici. Per uniformità di linguaggio le terne associate ai punti e ai vettori andrebbero scritte come *vettori colonna*, ma ciò comporterebbe ovvie difficoltà tipografiche. Si potrebbe far ricorso alla notazione con le matrici trasposte, ma si avrebbe un inutile appesantimento delle scritture. Rappresenteremo dunque le terne di coordinate dei punti e dei vettori con *vettori riga*, secondo la tradizione, tenendo però in mente che, quando avremo bisogno di usare la teoria delle matrici, queste terne sono in realtà *vettori colonna*.

## 5.4. Operazioni tra vettori, mediante le componenti

Supporremo sempre, nel seguito, di avere introdotto nello spazio un sistema cartesiano ortogonale monometrico  $Oxyz$  e di avere associato a esso una base,  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , di  $\mathbf{V}_3$ , che chiameremo *base canonica*. Se  $\mathbf{u}$  è un vettore di  $\mathbf{V}_3$  (diremo brevemente un vettore dello spazio), useremo le seguenti scritte, con ovvio significato dei simboli:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = (u_1, u_2, u_3) = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k} = (u_x, u_y, u_z) = \mathbf{u}_x + \mathbf{u}_y + \mathbf{u}_z.$$

Valgono le seguenti proprietà.

- *Somma di vettori:*  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1, u_2, u_3) + (v_1, v_2, v_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$ .
- *Prodotto di un vettore per un numero:*  $c\mathbf{u} = c(u_1, u_2, u_3) = (cu_1, cu_2, cu_3)$ .
- *Prodotto scalare di due vettori:*  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$ .

Si noti che il prodotto scalare si può pensare, usando il prodotto tra matrici, nel modo seguente:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_1 \quad u_2 \quad u_3) \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3),$$

dove l'ultima è una matrice a una sola riga e una sola colonna.

Un po' più complessa la situazione per quanto riguarda il prodotto vettoriale. Dati due vettori  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , si considera la seguente *matrice simbolica*:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Il *prodotto vettoriale* dei due vettori si ottiene calcolando il determinante simbolico di questa

matrice, secondo la prima riga:

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} = \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} + (u_3v_1 - u_1v_3)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k} .\end{aligned}$$

È come dire che le componenti del prodotto vettoriale di due vettori sono i cofattori degli elementi della prima riga nella matrice simbolica sopra considerata.

A questo punto è facile provare che il *prodotto misto* di tre vettori è dato da

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$



## 5.5. Esempi

**Esempio 5.1.** Calcola l'angolo tra i due vettori  $\mathbf{u} = (1, 0, 2)$  e  $\mathbf{v} = (-1, 1, 1)$

Si ha (teorema di Pitagora)

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}, \quad \|\mathbf{v}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \sqrt{5}\sqrt{3} \cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) \\ &= 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

e quindi

$$\cos(\widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}}) = \frac{1}{\sqrt{15}} \quad \Rightarrow \quad \widehat{\mathbf{u}\mathbf{v}} = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) \approx 75^\circ.$$

**Esempio 5.2.** Calcola i prodotti scalari e vettoriali tra le coppie di vettori della base canonica.

Basta tenere conto delle condizioni di parallelismo e perpendicolarità e delle proprietà dei due prodotti per concludere che:

- $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ ,  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ ,  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ ;
- $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0$ ,  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$ ,  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0$ ;
- $\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} = 0$ ,  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{j} = 0$ ,  $\mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = 0$ ;
- $\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} = \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} = \mathbf{i}$ ,  $\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} = \mathbf{j}$ ;
- $\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} = -\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} = -\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ .

**Esempio 5.3.** Utilizzando i risultati dell'esempio 5.2 e le proprietà dei prodotti scalare e vettoriale, ritrova le formule per il calcolo di questi prodotti, mediante le componenti.

Dati due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  si ha:

$$\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}.$$

Dunque

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \cdot (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = \\ &= u_1v_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + u_1v_2\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + u_1v_3\mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + u_2v_1\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + \\ &\quad + u_2v_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} + u_2v_3\mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + u_3v_1\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + u_3v_2\mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + u_3v_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3.\end{aligned}$$

Inoltre

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} &= (u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}) \wedge (v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}) = \\ &= u_1v_1\mathbf{i} \wedge \mathbf{i} + u_1v_2\mathbf{i} \wedge \mathbf{j} + u_1v_3\mathbf{i} \wedge \mathbf{k} + u_2v_1\mathbf{j} \wedge \mathbf{i} + \\ &\quad + u_2v_2\mathbf{j} \wedge \mathbf{j} + u_2v_3\mathbf{j} \wedge \mathbf{k} + u_3v_1\mathbf{k} \wedge \mathbf{i} + u_3v_2\mathbf{k} \wedge \mathbf{j} + u_3v_3\mathbf{k} \wedge \mathbf{k} = \\ &= u_1v_2\mathbf{k} - u_1v_3\mathbf{j} - u_2v_1\mathbf{k} + u_2v_3\mathbf{i} + u_3v_1\mathbf{j} - u_3v_2\mathbf{i} = \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\mathbf{i} - (u_1v_3 - u_3v_1)\mathbf{j} + (u_1v_2 - u_2v_1)\mathbf{k}.\end{aligned}$$

**Esempio 5.4.** Usando le proprietà dei determinanti verifica la proprietà anticommutativa del prodotto vettoriale.

La cosa è una semplice conseguenza del fatto che, nel calcolo del determinante, uno scambio di righe produce un cambio di segno.

**Esempio 5.5.** Verifica se i tre vettori  $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (-2, 0, 3)$ ,  $\mathbf{w} = (-1, 2, 4)$  sono complanari.

Basta calcolare il prodotto misto (in un ordine qualunque):

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = (-1)^{1+2} 2 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-2)(-5) + (-2)(+5) = 0 :$$

*L. Battaia*

Algebra lineare  
e geometria  
analitica

*Indice*



Pag. **68** di **107**

i vettori sono complanari.



## 5.6. Esercizi

Sono dati i vettori  $\mathbf{u} = (1, 2, 1)$ ,  $\mathbf{v} = (-1, 2, 3)$ ,  $\mathbf{w} = (-1, 2, -4)$ .

1. Calcola  $(3\mathbf{u} + 2\mathbf{v}) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \wedge (\mathbf{u} + 2\mathbf{w})$ .
2. Verifica se i vettori dati sono, a due a due, paralleli o perpendicolari.
3. Calcola l'angolo tra le tre possibili coppie dei vettori dati.
4. Verifica se i vettori dati sono complanari.
5. Calcola  $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})\mathbf{w} + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})\mathbf{u} + (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}$ .



## 6 Rette nel piano, rette e piani nello spazio

## 6.1. Equazioni, sistemi di equazioni e loro grafico

Se consideriamo un'equazione o un sistema di equazioni in due incognite, le loro eventuali soluzioni sono coppie di numeri reali; se l'equazione o il sistema di equazioni sono in tre incognite, le loro eventuali soluzioni sono terne di numeri reali. Avendo introdotto nel piano  $\mathbf{S}_2$ , o nello spazio  $\mathbf{S}_3$ , un sistema cartesiano, possiamo rappresentare le coppie o terne come punti e chiederci se è possibile stabilire, esaminando le caratteristiche algebriche delle equazioni, le proprietà dell'insieme di tutte le soluzioni. La risposta è affermativa in un gran numero di casi di interesse applicativo, e qui esamineremo i più semplici.

Consideriamo alcuni esempi per chiarire il problema.

**Esempio 6.1.** Tenendo conto della formula per la distanza tra due punti, si vede facilmente che le soluzioni dell'equazione

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

sono tutti i punti  $P(x, y)$  che hanno distanza 1 dal punto  $C(2, 3)$ : tutti questi punti stanno naturalmente sulla circonferenza di centro  $C$  e raggio 1.

**Esempio 6.2.** Con le stesse considerazioni dell'esempio 6.1 si conclude facilmente che l'equazione

$$((x - 2)^2 + (y - 3)^2 - 1) \cdot ((x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 4) = 0$$

ha come soluzioni l'unione dei punti delle due circonferenze di centro  $(2, 3)$  e  $(1, 2)$  e raggi rispettivamente 1 e 2.

**Esempio 6.3.** L'equazione

$$((x - 2)^2 + (y - 3)^2) \cdot ((x - 1)^2 + (y - 2)^2) = 0$$

ha invece come soluzioni solo i punti  $(2, 3)$  e  $(1, 2)$ .



**Esempio 6.4.** L'equazione

$$xy = 0$$

ha come soluzione tutti i punti del piano in cui almeno una delle due coordinate si annulla, ovvero tutti i punti dei due assi coordinati.

**Esempio 6.5.** L'equazione

$$|x| = |y|$$

ha come soluzioni tutti i punti che hanno coordinate uguali o opposte: si tratta delle due bisettrici degli angoli individuati dagli assi cartesiani.

**Esempio 6.6.** Tenendo conto della formula per la distanza tra due punti nello spazio, si vede facilmente che le soluzioni dell'equazione

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 + (z - 1)^2 = 1$$

sono tutti i punti  $P(x, y, z)$  che hanno distanza 1 dal punto  $C(2, 3, 1)$ : tutti questi punti stanno naturalmente sulla superficie sferica di centro  $C$  e raggio 1.

**Esempio 6.7.** L'equazione

$$xyz = 0$$

ha come soluzione tutti i punti dello spazio in cui almeno una delle tre coordinate si annulla, ovvero tutti i punti dei tre piani coordinati.

## 6.2. Grafici non cartesiani

I sistemi di coordinate cartesiane ortogonali monometrici (nel piano e nello spazio) non costituiscono l'unico metodo possibile, e spesso nemmeno il più semplice, per associare coppie di reali a punti del piano, o terne di reali a punti dello spazio.

Per limitarci al piano, uno dei sistemi alternativi più importanti è quello delle coordinate *polari*. Ce ne occupiamo brevemente e solo nelle linee essenziali.

Fissato nel piano un punto  $O$ , che sarà detto *polo*, e una semiretta  $r$  per  $O$ , che sarà l'origine degli angoli, ad ogni punto  $P$  del piano si può far corrispondere la coppia di reali  $(\varrho; \vartheta)$ , data dalla distanza  $\varrho$  di  $P$  da  $O$ , e dall'angolo, misurato “in senso antiorario” e *obbligatoriamente* in radianti, tra le semirette  $r$  e  $OP$ . Fissati  $O$  ed  $r$  si può considerare il sistema di coordinate cartesiane che ha come semiasse positivo delle ascisse la semiretta  $r$ , e come semiasse positivo delle ordinate la semiretta  $OP$ , con  $P = (1; \pi/2)$ . I due sistemi, polare e cartesiano, si dicono anche associati. Quando si usano, come spesso accade, contemporaneamente i due sistemi di coordinate occorre distinguere tra le coppie di reali che rappresentano lo stesso punto  $P$  nei due sistemi. Esistono varie convenzioni, tra cui quella di usare le parentesi quadre, anziché le tonde, per le coordinate polari. Riteniamo che questo possa ingenerare confusione con la notazione usata per gli intervalli di reali. Preferiamo, ma è una scelta strettamente personale, usare la scrittura con le parentesi tonde, ma con il punto e virgola al posto della virgola, come abbiamo fatto sopra.

Il sistema polare ha alcuni inconvenienti, tra cui importanti:

- al punto  $O$  risulta associato il numero  $\varrho = 0$ , ma nessun angolo;
- l'angolo  $\vartheta$  può assumere valori solo tra nell'intervallo  $[0, 2\pi[$  (o altro analogo di ampiezza  $2\pi$ ).

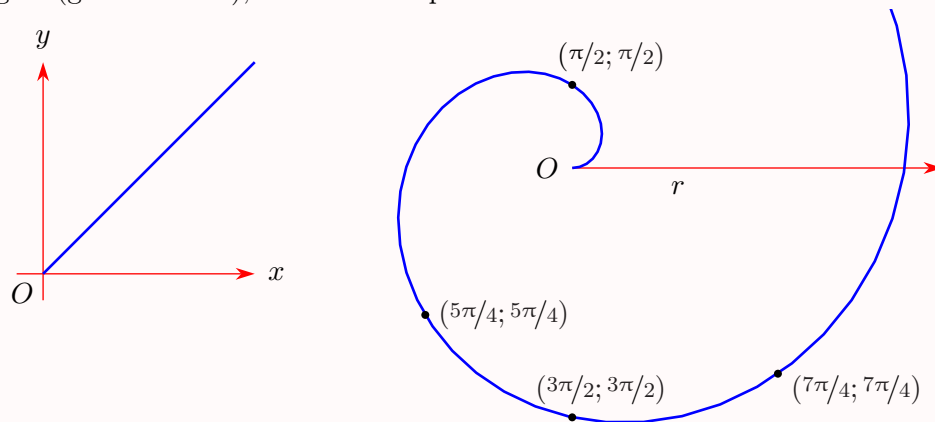
Il secondo inconveniente è particolarmente fastidioso, perché se consideriamo, per esempio, un punto che si muova in senso antiorario sulla circonferenza di centro  $O$  e raggio 1, a partire dal punto  $(1; 0)$ , troveremo che quando “riattraversa” la semiretta origine, la sua seconda coordinata passa bruscamente da valori vicini a  $2\pi$  a 0. Si può risolvere questo inconveniente introducendo angoli generalizzati, cioè maggiori di  $2\pi$ , ma questo comporta

una perdita della biunivocità della corrispondenza tra punti del piano e coppie di numeri reali (biunivocità che comunque già manca per il punto  $O$ ). Nonostante questi fatti, il sistema di coordinate polari è molto usato nelle applicazioni (si pensi per esempio alla descrizione dei moti circolari).

La cosa che qui ci preme segnalare è comunque che, quando si parla di grafico delle soluzioni di un'equazione, è *assolutamente indispensabile* precisare il sistema di coordinate che si vuole usare. Consideriamo per esempio l'equazione

$$y = x \text{ con le condizioni } x \geq 0, y \geq 0,$$

e rappresentiamone graficamente le soluzioni: in un sistema cartesiano ortogonale monometrico, pensando la  $x$  come ascissa e la  $y$  come ordinata, si avrà una semiretta (la bisettrice del primo quadrante); in un sistema polare, pensando la  $x$  come distanza dall'origine e la  $y$  come angolo (generalizzato), avremo una spirale.



**Figura 6.1:** Grafici di  $y = x$  in coordinate cartesiane e  $\rho = \vartheta$  in coordinate polari



È per questo motivo che, quando si chiede di fare il grafico delle soluzioni di un'equazione o di un sistema, è *indispensabile* precisare il sistema di coordinate scelto.

Si deve in particolare tenere presente che affermazioni del tipo: “un'equazione di primo grado in due incognite ha come grafico una retta”, sottintende che si considerino sistemi cartesiani e non polari. Detto in altri termini l'insieme delle soluzioni di un'equazione in due incognite è un ben determinato sottoinsieme di  $\mathbb{R}^2$ , la sua rappresentazione grafica dipende invece dal sistema di coordinate scelto.

## 6.3. La retta nel piano cartesiano

Consideriamo la più generale equazione di primo grado in due incognite:

$$ax + by + c = 0. \quad (6.1)$$

Perché sia effettivamente un'equazione di primo grado occorre che i coefficienti  $a$  e  $b$  non siano contemporaneamente nulli. In formule questa condizione si può scrivere, per esempio,  $a^2 + b^2 > 0$  oppure  $|a| + |b| > 0$ .

Poiché vogliamo usare la teoria delle matrici, consideriamo la matrice incompleta e la matrice completa, scrivendo l'equazione nella forma, tipica dei sistemi,  $ax + by = -c$ , cioè con il termine noto a secondo membro:

$$A|b = \left( \begin{array}{cc|c} a & b & -c \end{array} \right).$$

Poiché è ovvio che i tre coefficienti non devono essere contemporaneamente nulli, la condizione sopradetta coincide allora con la condizione di risolubilità del "sistema" (costituito da una sola equazione)

$$\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-c),$$

che è la condizione

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1.$$

Tenendo conto della teoria generale dei sistemi lineari, possiamo affermare che in queste condizioni l'equazione ha  $\infty^1$  soluzioni, dipendenti da un parametro. Precisamente

— se  $a \neq 0$ , allora si scrive  $ax = -by - c$ , da cui

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{a}t - \frac{c}{a} \\ y = t \end{cases};$$

— se  $b \neq 0$ , allora si scrive  $by = -ax - c$ , da cui

$$\begin{cases} x = t \\ y = -\frac{a}{b}t - \frac{c}{b} \end{cases};$$

— se  $a \neq 0 \wedge b \neq 0$ , si può scegliere indifferentemente una o l'altra forma.

Volendo considerare una formulazione generale che comprenda i casi visti, si usa scrivere la soluzione nella forma:

$$\begin{cases} x = \lambda t + \alpha \\ y = \mu t + \beta \end{cases}; \quad (6.2)$$

In un sistema cartesiano ortogonale monometrico  $Oxy$ , l'insieme delle soluzioni di un'equazione di primo grado in due incognite ha *sempre* come grafico una retta  $r$  e, viceversa, ad ogni retta  $r$  del piano corrisponde una sola equazione di primo grado in due incognite le cui soluzioni sono proprio tutti e soli i punti della retta.

Ebbene

1. un'equazione del tipo 6.1 si dice *equazione implicita della retta*;
2. un sistema di equazioni del tipo 6.2 si dice (*sistema di*) *equazioni parametriche della retta*, o semplicemente *equazione parametrica della retta*.

Se  $b \neq 0$  l'equazione 6.1 si può anche scrivere nella forma

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} = mx + q, \quad (6.3)$$

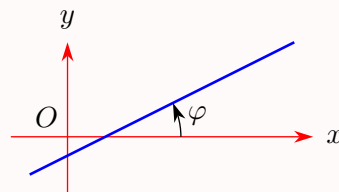
che viene detta *equazione esplicita della retta*. Si noti che la condizione  $b \neq 0$  implica che la retta non sia “verticale”, cioè parallela all'asse  $O_y$ .

È ovvio che l'equazione esplicita si può sempre scrivere in forma implicita ( $mx - y + q = 0$ ) oppure parametrica ( $x = t; y = mt + q$ ).

Valgono le seguenti proprietà:

— *equazione implicita*: il vettore  $\mathbf{v} = (a, b)$  è perpendicolare alla retta;

- *equazione parametrica*: il vettore  $\mathbf{u} = (\lambda, \mu)$  è parallelo alla retta, esso è anche detto *vettore direttore* della retta; il punto  $P(\alpha, \beta)$  è un punto della retta;
- *equazione esplicita*: il numero  $m$ , detto *coefficiente angolare*, è la tangente trigonometrica dell'angolo  $\varphi$  della figura 6.2 (considerato nullo se la retta è parallela all'asse delle ascisse). In considerazione di quanto sopra detto possiamo affermare che il vettore  $\mathbf{v} = (m, -1)$  è perpendicolare alla retta, mentre il vettore  $\mathbf{u} = (1, m)$  le è parallelo (e in effetti si vede subito che  $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ , in accordo con la condizione di perpendicolarità tra due vettori). Il numero  $q$  è anche detto *ordinata all'origine*, in quanto rappresenta l'ordinata del punto di ascissa 0



**Figura 6.2:** Coefficiente angolare di una retta

Il coefficiente angolare di una retta (non verticale!) ha un importante significato geometrico: se  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$  sono due punti della retta si ha

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

In sostanza il coefficiente angolare dà la variazione verticale (cioè di quota) in rapporto alla variazione orizzontale: è per questo motivo che si chiama anche *pendenza*.

L'ultima forma dell'equazione di una retta, utile in alcune circostanze, è la cosiddetta *equazione segmentaria*, che si può scrivere nel caso in cui sia  $a$  che  $b$  che  $c$  siano diversi da zero (retta non parallela a nessuno dei due assi e non passante per l'origine). In questo caso si ottiene:

$$ax + by = -c \Rightarrow \frac{x}{-c/a} + \frac{y}{-c/b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1.$$

I numeri  $p$  e  $q$  rappresentano l'ascissa e, rispettivamente, l'ordinata dei punti di intersezione della retta con gli assi.

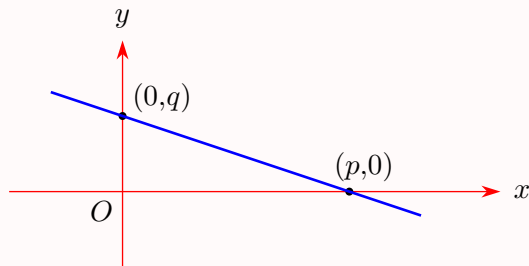


Figura 6.3: Equazione segmentaria della retta

**Osservazione 6.1.** Quando si parla di equazioni parametriche di una retta non si dovrebbe mai dire “l’equazione parametrica”, ma “una equazione parametrica”. Infatti la stessa retta può essere rappresentata in forma parametrica in infiniti modi diversi: l’unica cosa che conta è che il vettore  $(\lambda, \mu)$  sia parallelo alla retta e che il punto  $(\alpha, \beta)$  sia un punto della retta. Per esempio le seguenti equazioni sono tutte equazioni della stessa retta.

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t + 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = 2t - 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = (1/2)t + 2 \\ y = -t + 1 \end{cases}.$$

La domanda che può sorgere spontanea è: date due equazioni parametriche, individuate da  $(\lambda_1, \mu_1)$ ,  $(\alpha_1, \beta_1)$  e  $(\lambda_2, \mu_2)$ ,  $(\alpha_2, \beta_2)$  rispettivamente, come si può controllare se sono o no le equazioni di una stessa retta?. Il modo di più semplice è quella di controllare intanto se  $(\lambda_1, \mu_1)$  è parallelo a  $(\lambda_2, \mu_2)$ , e poi se il punto  $(\alpha_1, \beta_1)$  verifica la seconda coppia di equazioni,



mentre il punto  $(\alpha_2, \beta_2)$  verifica la prima coppia. Lo si faccia per esercizio sull'esempio sopra proposto.

Una osservazione simile vale anche per l'equazione implicita (detta anche cartesiana):  $x + 2y - 1 = 0$  e  $2x + 4y - 2 = 0$  sono equazioni che hanno, ovviamente, le stesse soluzioni e quindi rappresentano la stessa retta. È molto importante tenere conto di questa osservazione, in particolare quando viene richiesto di trovare l'equazione implicita di una retta: anche se i parametri da determinare sono tre  $(a, b, c)$  le condizioni da considerare sono solo due.

## 6.4. Applicazioni

Utilizzando la teoria dei vettori e le osservazioni sopra riportate è facile ricavare le più importanti formule riguardanti la geometria analitica della retta nel piano. In sostanza tutte le formule che otterremo, molto importanti nelle applicazioni, possono essere considerate degli esercizi di calcolo vettoriale: per questo svolgeremo quasi sempre i calcoli in dettaglio.

In quanto segue  $r$  ed  $s$  denoteranno due rette, rispettivamente di equazioni

- implicite:  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  e  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ;
- parametriche:  $x = \lambda_1t + \alpha_1$ ,  $y = \mu_1t + \beta_1$  e  $x = \lambda_2t + \alpha_2$ ,  $y = \mu_2t + \beta_2$ ;
- esplicite:  $y = m_1x + q_1$  e  $y = m_2x + q_2$ .

### 6.4.1. Condizioni di parallelismo

Due rette  $r$  ed  $s$  sono parallele se e solo se lo sono due loro vettori normali o due loro vettori direttori. Dunque

$$r \parallel s \Leftrightarrow \mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} \parallel \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix},$$

oppure

$$r \parallel s \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \mu_1 \end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix} \lambda_2 \\ \mu_2 \end{pmatrix}.$$

Si può usare la condizione di parallelismo espressa tramite prodotto vettoriale e si ottiene, nel caso dell'equazione implicita,

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & b_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow a_1b_2 - a_2b_1 = 0.$$

Operando nello stesso modo con le equazioni parametriche si ottiene:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \lambda_1 & \mu_1 & 0 \\ \lambda_2 & \mu_2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda_1 & \mu_1 \\ \lambda_2 & \mu_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 0.$$

Ancora più semplice la situazione nel caso dell'equazione esplicita:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ m_1 & -1 & 0 \\ m_2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m_1 & -1 \\ m_2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -m_1 + m_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2.$$

### 6.4.2. Condizione di perpendicolarità

In questo caso si tratta di utilizzare la condizione di perpendicolarità esprimibile mediante l'annullamento del prodotto scalare. Si ottiene subito:

- equazione implicita:  $a_1a_2 + b_1b_2 = 0$ ;
- equazione parametrica:  $\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2 = 0$ ;
- equazione esplicita:  $m_1m_2 + 1 = 0, \Leftrightarrow m_1m_2 = -1$  (in questo caso occorre supporre che le due rette non siano né verticali né orizzontali).

### 6.4.3. Retta per due punti

Dati due punti distinti  $A(x_A, y_A)$  e  $B(x_B, y_B)$ , vogliamo trovare l'equazione della retta da essi univocamente individuata.

Cominciamo con l'osservare che il vettore  $\mathbf{u} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$  è parallelo alla retta. Questo ci consente di scrivere immediatamente le equazioni parametriche della retta cercata:

$$\begin{cases} x = (x_B - x_A)t + x_A \\ y = (y_B - y_A)t + y_A \end{cases},$$

che sono della forma 6.2.

Per scrivere l'equazione implicita basta osservare che un punto  $P(x, y)$  del piano  $Oxy$  appartiene alla retta se e soltanto se il vettore  $\overrightarrow{AP}$  risulta parallelo al vettore  $u$ . Scriviamo la condizione di parallelismo (direttamente col prodotto vettoriale, senza tentare di memorizzare la formula che pure abbiamo appena ricavato!):

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_B - x_A & y_B - y_A & 0 \\ x - x_A & y - y_A & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_B - x_A & y_B - y_A \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix} = 0,$$

condizione che si può scrivere anche

$$(x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A).$$

Spesso nei testi questa formula si trova scritta nella forma

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}.$$

Ne sconsigliamo l'uso, in quanto in quest'ultima forma occorre che i denominatori siano diversi da zero, ovvero che la retta non sia parallela a nessuno dei due assi, la qual cosa non è sempre verificata nelle applicazioni che interessano.

#### 6.4.4. Retta per un punto e parallela (o perpendicolare) a una retta data

Se la retta data è non verticale, si può, come già noto, scrivere in forma esplicita:  $y = mx + q$ , cioè  $mx - y + q = 0$ , con vettore perpendicolare  $\mathbf{v} = (m, -1)$ , o parametrica  $x = t; y = mt + q$ , con vettore parallelo  $\mathbf{u} = (1, m)$ . Procediamo intanto a trovare la parallela a una retta data. Detto  $A(x_A, y_A)$  il punto assegnato, un punto  $P(x, y)$  appartiene alla retta se e solo se  $\overrightarrow{AP}$  è parallelo a  $\mathbf{u}$ .

— Usando la condizione di parallelismo si ottiene:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & m & 0 \\ x - x_A & y - y_A & 0 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & m \\ x - x_A & y - y_A \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - y_A = m(x - x_A).$$

— Usando la condizione di perpendicolarità si ottiene:

$$\begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y - y_A = m(x - x_A),$$

cioè lo stesso risultato di prima.

Se non è possibile, o conveniente, scrivere la retta data in forma esplicita e si vuole usare la forma implicita,  $ax + by + c = 0$ , un vettore perpendicolare alla retta è immediato ( $\mathbf{v} = (a, b)$ ), un vettore parallelo si può trovare o passando alle equazioni parametriche o, semplicemente, prendendo due punti  $P$  e  $Q$  arbitrari della retta e considerando il vettore  $\mathbf{u} = P - Q$ . Dopodichè si procede esattamente come prima. Si può, ancora più semplicemente, osservare che la retta cercata deve essere del tipo  $ax + by + \gamma = 0$ , e che la determinazione di  $\gamma$  richiede solo di scrivere la condizione di passaggio per il punto dato  $A$ .

A questo punto la scrittura dell'equazione della retta per un punto e perpendicolare a una retta data è poco più che un gioco da ragazzi...

### 6.4.5. Distanza di un punto da una retta

Siano  $A(x_A, y_A)$  un punto e  $r$  una retta di equazione implicita  $ax + by + c = 0$  (in questo caso l'equazione implicita è la più conveniente). Detto  $P(x_P, y_P)$  un generico punto della retta, la distanza richiesta,  $d(A, r)$ , non è altro che il modulo della proiezione di  $\overrightarrow{AP}$  sulla perpendicolare alla retta stessa.

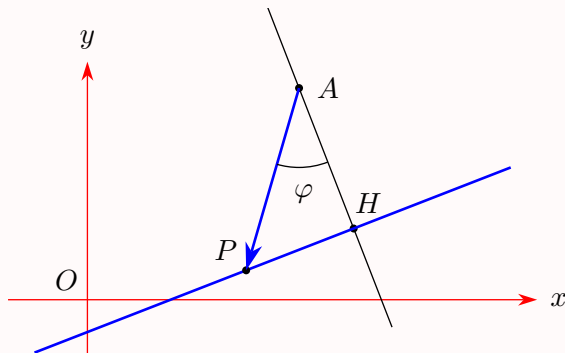


Figura 6.4: Distanza di un punto da una retta

Con riferimento alla figura 6.4, si ha:  $\overline{AH} = \|\overrightarrow{AP}\| \cdot |\cos(\varphi)|$ . Teniamo ora conto che  $\mathbf{v} = (a, b)$  è un vettore perpendicolare alla retta, cioè parallelo ad  $AH$ . Il vettore  $\mathbf{v}$  potrebbe avere il verso di  $\overline{AH}$  oppure quello di  $\overline{HA}$ . Allora l'angolo tra  $\mathbf{v}$  e  $\overrightarrow{AP}$  è  $\varphi$ , oppure  $\pi - \varphi$ , ma questi due angoli hanno coseno che differisce solo per il segno. Se ne deduce che

$$|\mathbf{v} \cdot \overrightarrow{AP}| = |a(x_P - x_A) + b(y_P - y_A)| = \|\mathbf{v}\| \|\overrightarrow{AP}\| |\cos(\varphi)|,$$

da cui

$$|\cos(\varphi)| = \frac{|a(x_P - x_A) + b(y_P - y_A)|}{\|\mathbf{v}\| \|\overrightarrow{AP}\|}.$$

Teniamo ora conto che il punto  $A$  appartiene alla retta, per cui  $ax_A + by_A = -c$ , e che

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Allora

$$|\cos(\varphi)| = \frac{|ax_P + by_P - (ax_A + by_A)|}{\|\mathbf{v}\| \|\overrightarrow{AP}\|} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\|\mathbf{v}\| \|\overrightarrow{AP}\|}.$$

*L. Battaia*

Algebra lineare  
e geometria  
analitica

Indice



Pag. 85 di 107

Si conclude che

$$d(A, r) = \overline{AH} = \|\overrightarrow{AP}\| \cdot |\cos(\varphi)| = \|\overrightarrow{AP}\| \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2} \|\overrightarrow{AP}\|} = \frac{|ax_P + by_P + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

## 6.5. Intersezioni di rette nel piano

Date due o più rette nel piano ci possiamo chiedere se esse hanno o no punti in comune. Dal punto di vista algebrico il problema si traduce nella risoluzione di un sistema di equazioni in due incognite, a cui si potranno applicare tutte le tecniche già viste.

È particolarmente importante, per il suo significato geometrico, il caso di due rette:  $a_1x + b_1y + c_1 = 0$  e  $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ . Il sistema formato dalle due equazioni è

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2 \end{cases},$$

con le matrici completa e incompleta seguenti

$$A|b = \left( \begin{array}{cc|c} a_1 & b_1 & -c_1 \\ a_2 & b_2 & -c_2 \end{array} \right).$$

Si possono presentare tre possibilità.

—  $\text{rg}(A) = 2$  (e quindi a fortiori  $\text{rg}(A|b) = 2$ ), ovvero

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

In questo caso il sistema ha una sola soluzione, il punto di intersezione delle due rette. Si può notare che la condizione appena scritta non è altro che la condizione che le due rette non siano parallele. In questo caso le due rette appartengono a un *fascio proprio* di rette.

—  $\text{rg}(A) = 1$  e  $\text{rg}(A|b) = 2$ , ovvero

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0, \text{ ma } \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \vee \begin{vmatrix} b_1 & -c_1 \\ b_2 & -c_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

In questo caso il sistema non ha soluzioni. Le condizioni appena scritte esprimono il fatto che le due rette sono parallele, ma distinte. Le due rette appartengono dunque a un *fascio improprio* di rette.



—  $\text{rg}(A) = 1$  e  $\text{rg}(A|b) = 1$ , ovvero

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & -c_1 \\ a_2 & -c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & -c_1 \\ b_2 & -c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

In questo caso il sistema ha infinite ( $\infty^1$ ) soluzioni. Le condizioni appena scritte esprimono il fatto che le due rette sono parallele e coincidenti.



## 6.6. Rette nel piano: esercizi

Sono dati i punti  $A(-1, -1)$ ,  $B(5, 2)$ ,  $C(3, 5)$  e la retta  $r: 2x - y + 1 = 0$ . Risolvi i seguenti problemi, applicando le tecniche del calcolo vettoriale, e facendo il minor uso possibile delle formule dimostrate.

**Esercizio 6.1.** Trova le equazioni parametriche della retta  $r$ .

**Esercizio 6.2.** Trova la retta per  $A(-1, -1)$  e  $B(5, 2)$  e perpendicolare alla retta  $r$ .

**Esercizio 6.3.** Trova la retta per  $A(-1, -1)$  e  $B(5, 2)$  e parallela alla retta  $r$ .

**Esercizio 6.4.** Trova la distanza tra la retta  $AC$  e il punto  $B$ .

**Esercizio 6.5.** Trova il prodotto vettoriale tra i vettori  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$ .

**Esercizio 6.6.** Trova il prodotto scalare tra il vettore  $\overrightarrow{BC}$  e un vettore parallelo a  $r$ .

## 6.7. Piani nello spazio cartesiano

La trattazione dell'equazione di un piano nello spazio cartesiano avviene in maniera sostanzialmente identica a quella delle rette nello spazio; naturalmente, avendo ora una variabile in più, la situazione potrà essere più complessa (e quindi più interessante). Lo si può constatare confrontando le righe che seguono con le definizioni date nel caso della retta nel piano.

Consideriamo la più generale equazione di primo grado in tre incognite:

$$ax + by + cz + d = 0. \quad (6.4)$$

Perché sia effettivamente un'equazione di primo grado occorre che i coefficienti  $a$ ,  $b$  e  $c$  non siano contemporaneamente nulli. In formule questa condizione si può scrivere, per esempio,  $a^2 + b^2 + c^2 > 0$  oppure  $|a| + |b| + |c| > 0$ .

Poiché vogliamo usare la teoria delle matrici, consideriamo la matrice incompleta e la matrice completa, scrivendo l'equazione nella forma, tipica dei sistemi,  $ax + by + cz = -d$ , cioè con il termine noto a secondo membro:

$$A|b = \left( \begin{array}{ccc|c} a & b & c & -d \end{array} \right).$$

Poiché è ovvio che i quattro coefficienti non devono essere contemporaneamente nulli, la condizione sopradetta coincide allora con la condizione di risolubilità del "sistema" (costituito da una sola equazione)

$$\left( \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-d),$$

che è la condizione

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 1.$$

Tenendo conto della teoria generale dei sistemi lineari, possiamo affermare che in queste condizioni l'equazione ha  $\infty^2$  soluzioni, dipendenti da due parametri. Precisamente

— se  $a \neq 0$ , allora si scrive  $ax = -by - cz - d$ , da cui

$$\begin{cases} x = -\frac{b}{a}u - \frac{c}{a}v - \frac{d}{a} \\ y = u \\ z = v \end{cases};$$

— se  $b \neq 0$ , allora si scrive  $by = -ax - cz - d$ , da cui

$$\begin{cases} x = u \\ y = -\frac{a}{b}u - \frac{c}{b}v - \frac{d}{b} \\ z = v \end{cases};$$

— se  $c \neq 0$ , allora si scrive  $cz = -ax - by - d$ , da cui

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ y = -\frac{a}{c}u - \frac{b}{c}v - \frac{d}{c} \end{cases};$$

— se  $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$ , si può scegliere indifferentemente una o l'altra forma.

Volendo considerare una formulazione generale che comprenda i casi visti, si usa scrivere la soluzione nella forma:

$$\begin{cases} x = \lambda_1 u + \lambda_2 v + \alpha \\ y = \mu_1 u + \mu_2 v + \beta \\ z = \nu_1 u + \nu_2 v + \gamma \end{cases}; \quad (6.5)$$

In un sistema cartesiano ortogonale monometrico  $Oxyz$ , l'insieme delle soluzioni di un'equazione di primo grado in tre incognite ha *sempre* come grafico un piano  $\pi$  e, viceversa, ad ogni piano  $\pi$  dello spazio corrisponde una sola equazione di primo grado in due incognite le cui soluzioni sono proprio tutti e soli i punti del piano.

Ebbene

1. un'equazione del tipo 6.4 si dice *equazione implicita del piano*;

2. un sistema di equazioni del tipo 6.5 si dice (*sistema di*) *equazioni parametriche del piano*, o, semplicemente *equazione parametrica del piano*;

Se  $c \neq 0$  l'equazione 6.4 si può anche scrivere nella forma

$$z = -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y - \frac{d}{c} = mx + ny + q, \quad (6.6)$$

che viene detta *equazione esplicita del piano*. Si noti che la condizione  $c \neq 0$  implica che il piano non sia “verticale”, cioè parallelo all’asse  $O_z$ , o, il che è lo stesso, perpendicolare al piano  $O_{xy}$ .

È ovvio che l’equazione esplicita si può sempre scrivere in forma implicita ( $mx + ny - z + q = 0$ ) oppure parametrica ( $x = u; y = v; z = mu + nv + q$ ).

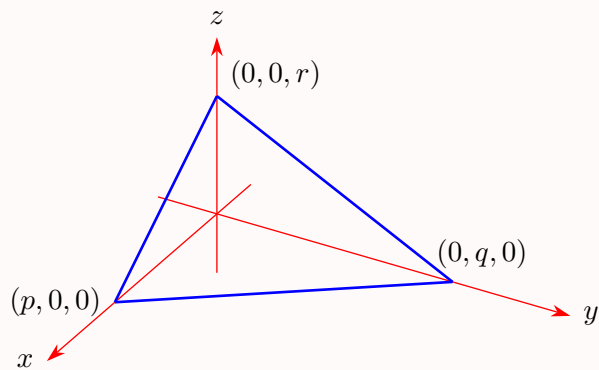
Valgono le seguenti proprietà:

- *equazione implicita*: il vettore  $\mathbf{v} = (a, b, c)$  è perpendicolare al piano;
- *equazione parametrica*: i vettori  $\mathbf{u}_1 = (\lambda_1, \mu_1, \nu_1)$  e  $\mathbf{u}_2 = (\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$  sono paralleli al piano, e non paralleli tra di loro, e si dicono anche *vettore di giacitura* del piano; il punto  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  è un punto del piano;
- *equazione esplicita*: in considerazione di quanto appena detto possiamo affermare che il vettore  $\mathbf{v} = (m, n, -1)$  è perpendicolare al piano, mentre i vettori  $\mathbf{u}_1 = (1, 0, m)$  e  $\mathbf{u}_2 = (0, 1, n)$  sono paralleli al piano (e in effetti si può facilmente controllare che i vettori  $\mathbf{v} = (m, n, -1)$  e  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 \wedge \mathbf{u}_2$  sono tra di loro paralleli).

L’ultima forma dell’equazione di un piano, utile in alcune circostanze, è la cosiddetta *equazione segmentaria*, che si può scrivere nel caso in cui  $a, b, c$  e  $d$  sono diversi da zero (piano non parallelo a nessuno dei tre assi e non passante per l’origine). In questo caso si ottiene:

$$ax + by + cz = -d \Rightarrow \frac{x}{-d/a} + \frac{y}{-d/b} + \frac{z}{-d/c} = 1 \Rightarrow \frac{x}{p} + \frac{y}{q} + \frac{z}{r} = 1.$$

I numeri  $p, q$  ed  $r$  rappresentano la coordinata non nulla dei punti di intersezione del piano con gli assi.



**Figura 6.5:** *Equazione segmentaria del piano*



## 6.8. Applicazioni

Utilizzando quasi le stesse parole già usate nel caso della retta, utilizzando la teoria dei vettori si possono ottenere tutte le più importanti formule della geometria analitica del piano nello spazio. Anche in questo caso le formule che via via otterremo possono essere considerate esercizi di calcolo vettoriale. Come nel caso della retta, anche qui useremo notazioni il cui significato sarà ovvio dal contesto.

### 6.8.1. Condizioni di parallelismo e perpendicolarità

Due piani  $\alpha$  e  $\beta$  sono paralleli se e solo se due loro vettori normali sono paralleli. Se i piani sono dati in forma implicita, due vettori normali sono semplicemente dati da  $(a_1, b_1, c_1)$  e  $(a_2, b_2, c_2)$ . Se i piani sono dati in forma parametrica, per trovare due vettori normali basta fare il prodotto vettoriale di due vettori di giacitura. Nel primo caso, per esempio, la condizione di parallelismo si potrà scrivere

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \operatorname{rg} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 1.$$

Due piani  $\alpha$  e  $\beta$  sono perpendicolari se e solo se due loro vettori normali sono perpendicolari. Analogamente alla condizione di parallelismo, la perpendicolarità tra due piani in equazione esplicita si potrà scrivere, usando il prodotto scalare,

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0$$

### 6.8.2. Piano per tre punti non allineati

Dati tre punti non allineati  $A(x_A, y_A, z_A)$ ,  $B(x_B, y_B, z_B)$  e  $C(x_C, y_C, z_C)$ , vogliamo trovare l'equazione di piano da essi univocamente individuata.

Cominciamo con l'osservare che i vettori  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  sono due vettori non paralleli, che possono essere usati come vettori di giacitura del piano. Le equazioni parametriche sono ora immediate:

$$\begin{cases} x = (x_B - x_A)u + (x_C - x_A)v + x_A \\ y = (y_B - y_A)u + (y_C - y_A)v + y_A \\ z = (z_B - z_A)u + (z_C - z_A)v + z_A \end{cases} .$$

Per scrivere un'equazione implicita si può procedere in vari modi.

Se si calcola il prodotto vettoriale  $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ , si ottiene un vettore perpendicolare al piano: le sue componenti, che possiamo indicare con  $a, b, c$ , si possono assumere come primi tre parametri nell'equazione  $ax + by + cz + d = 0$ . Il parametro restante si può trovare imponendo la condizione di passaggio per uno dei tre punti dati.

Si può in alternativa osservare che un punto  $P(x, y, z)$  appartiene al piano se, e solo se, i tre vettori  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{AB}$  e  $\overrightarrow{AC}$  sono paralleli. La condizione di complanarità scritta con il prodotto misto, o direttamente con il determinante diventa:

$$\begin{vmatrix} x - x_A & y - y_A & z - z_A \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \end{vmatrix} = 0$$

### 6.8.3. Piano per un punto e parallelo a un piano dato

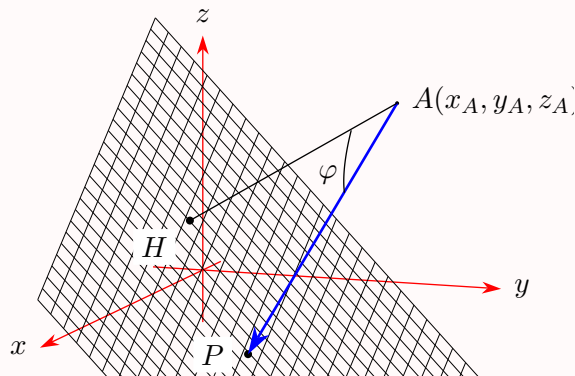
Si può semplicemente osservare che se  $ax + by + cz + d = 0$  è il piano dato, quello cercato deve essere del tipo  $ax + by + cz + \delta = 0$  e la determinazione di  $\delta$  richiede solo di scrivere la condizione di passaggio per il punto assegnato.

### 6.8.4. Distanza di un punto da un piano

È un utile esercizio ripetere, quasi con le stesse parole, quanto già detto per la distanza di un punto da una retta.

Detto  $A(x_A, y_A, z_A)$  un punto e  $\pi$  un piano di equazione implicita  $ax + by + cz + d = 0$  (anche in questo caso l'equazione implicita è la più conveniente) si ottiene facilmente:

$$d(A, \pi) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$



**Figura 6.6:** Distanza di un punto da un piano

## 6.9. Intersezione di piani nello spazio

Dati due o più piani nello spazio ci possiamo chiedere se essi hanno o no punti in comune. Dal punto di vista algebrico il problema si traduce nella risoluzione di un sistema di equazioni in tre incognite, a cui si potranno applicare tutte le tecniche già viste.

Sono particolarmente importanti, per il loro significato geometrico, il caso di due e quello di tre piani:  $a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ ,  $a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$  e  $a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$ .

Nel caso di tre piani, il sistema formato dalle loro equazioni è

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = -d_3 \end{cases},$$

con le matrici completa e incompleta seguenti

$$A|b = \left( \begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & -d_3 \end{array} \right).$$

Se la matrice  $A$  ha rango massimo, 3, il sistema è sicuramente compatibile e ha una e una sola soluzione: i tre piani passano per uno stesso punto, ovvero appartengono a quella che si chiama una *stella di piani*.

Se la matrice  $A$  ha rango minore di 3 allora il sistema può essere compatibile o incompatibile, a seconda che  $A|b$  abbia o no lo stesso rango di  $A$ . Se il sistema è compatibile e  $A$  ha rango 2, allora una delle tre equazioni è superflua e il sistema formato dalle altre due ha infinite ( $\infty^1$ ) soluzioni, dipendenti da un parametro  $t$ : si tratta di tre piani che hanno in comune una retta, cioè appartengono ad un *fascio di piani*. Se il sistema è compatibile e  $A$  ha rango 1, allora due delle tre equazioni sono superflue e il sistema ha infinite ( $\infty^2$ ) soluzioni, dipendenti da due parametri  $u$  e  $v$ : si tratta di tre piani coincidenti. Se il sistema è incompatibile si possono presentare varie situazioni. Per esempio se i piani sono distinti possono essere tutti tra di loro paralleli, due tra di loro paralleli e uno no, a due a due

incidenti in rette parallele. È un utile esercizio discutere le varie possibilità alla luce dei ranghi rispettivi di  $A$  e  $A|b$ .

Consideriamo ora un sistema formato da due sole equazioni.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases},$$

con le matrici completa e incompleta seguenti

$$A|b = \left( \begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \end{array} \right).$$

Se il rango di  $A$ , e quindi a fortiori di  $A|b$ , è 2, il sistema ha infinite ( $\infty^1$ ) soluzioni dipendenti da un parametro  $t$ : si tratta, come già più sopra osservato, dei punti appartenenti alla retta intersezione dei due piani, che, in ragione del valore del rango della matrice incompleta, non sono paralleli. Anzi, nello spazio, è proprio come intersezione di due piani non paralleli che si scrive una retta in *equazione cartesiana*. Se il rango di  $A$  è 1 e il sistema è compatibile, il sistema ha  $\infty^2$  soluzioni, cioè i due piani coincidono; se il sistema non è compatibile, i due piani sono paralleli. Il fatto che il rango di  $A$  sia 1 è difatti espresso proprio dalla condizione di parallelismo dei due vettori  $(a_1, b_1, c_1)$  e  $(a_2, b_2, c_2)$ .

## 6.10. Rette nello spazio

Una retta nello spazio può essere rappresentata sostanzialmente in due modi: mediante *equazioni cartesiane*, ovvero come intersezione di due piani non paralleli (come già osservato), oppure mediante equazioni parametriche.

Riconsideriamo allora il sistema di 2 equazioni in tre incognite già visto sopra:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z - d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z - d_2 = 0 \end{cases}, \quad (6.7)$$

che, al solito, scriviamo con i termini noti a secondo membro

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = -d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = -d_2 \end{cases},$$

con le matrici completa e incompleta seguenti

$$A|b = \left( \begin{array}{ccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & -d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & -d_2 \end{array} \right),$$

e supponiamo che il rango di  $A$  sia 2, condizione che traduce in formule, come già osservato, il fatto che i due piani non sono paralleli

Almeno uno dei tre minori della matrice  $A$  ha dunque determinante diverso da zero, e si può applicare il noto metodo di risoluzione dei sistemi. Se, per esempio,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0,$$

il sistema si può scrivere nella forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1z - d_1 \\ a_2x + b_2y = -c_2z - d_2 \end{cases}.$$



Ponendo  $z = t$  il sistema si risolve con il metodo di Cramer e la soluzione si può scrivere nella forma:

$$\begin{cases} x = \lambda t + \alpha \\ y = \mu t + \beta \\ z = t \end{cases},$$

con opportuni valori dei parametri.

In generale, considerando le varie possibilità, la soluzione potrà essere scritta nella forma:

$$\begin{cases} x = \lambda t + \alpha \\ y = \mu t + \beta \\ z = \nu t + \gamma \end{cases}, \quad (6.8)$$

detta (*sistema di*) *equazioni parametriche* di una retta nello spazio. Il sistema 6.7, per contro, si chiama *equazione cartesiana* di una retta nello spazio. Come si noterà l'equazione 6.8 è praticamente la stessa della 6.2, che rappresentava una retta nel piano: l'unica differenza è l'aggiunta della variabile  $z$ . Valgono anche le stesse proprietà. In particolare il vettore  $\mathbf{u} = (\lambda, \mu, \nu)$  è parallelo alla retta, esso è anche detto *vettore direttore* della retta; il punto  $P(\alpha, \beta, \gamma)$  è un punto della retta.

Il passaggio da una forma all'altra dell'equazione della retta si può fare in vari modi. Per esempio dall'equazione cartesiana si passa a quella parametrica seguendo il procedimento (basato sulla regola di Cramer) delineato sopra. Si può, in alternativa, osservare che il vettore ottenuto come prodotto vettoriale tra  $\mathbf{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$  e  $\mathbf{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$  è un vettore direttore della retta e quindi basta successivamente trovarne un punto. Il passaggio dall'equazione parametrica a quella cartesiana è poi immediato: basta, per esempio, ricavare la  $t$  in una delle tre equazioni e sostituirla nelle altre due.

La cosa che si deve ricordare, sia per il piano che per lo spazio, è che nell'equazione cartesiana (o implicita) si dispone immediatamente di uno (nel piano) o due (nello spazio) vettori perpendicolari alla retta, nell'equazione parametrica si dispone invece immediatamente di un vettore parallelo alla retta. Usando opportunamente le proprietà dei vettori si potranno risolvere tutti i problemi che riguardano rette e piani anche nello spazio.

## 6.11. Esempi e applicazioni

Proponiamo ora alcuni problemi tipici che concernono rette e piani nello spazio. In tutti i casi daremo solo indicazioni di massima su un dei metodi applicabili: è un utile esercizio tradurre le indicazioni in procedimenti operativi, magari esplorando le (spesso numerose) alternative possibili.

### Piano parallelo a due rette non parallele e passante per un punto

Le due rette individuano due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  che individuano la giacitura del piano. La conoscenza del punto rende poi unico il piano cercato: le equazioni parametriche si possono scrivere facilmente. Osserviamo che se le due rette fossero parallele, il problema avrebbe infinite soluzioni, e precisamente tutto il fascio di piani individuato dalla retta  $r$  passante per il punto dato e parallela a una delle due rette date.

### Retta per due punti

Detti  $A$  e  $B$  i due punti, basta osservare che il vettore  $AB$  è un vettore direttore della retta: questo fatto, unitamente al passaggio per uno dei punti consente di scrivere subito le equazioni parametriche.

### Piano per un punto e una retta che non si appartengono

Tra i procedimenti possibili c'è quello di trovare un punto  $A$  sulla retta. Detto poi  $P$  il punto dato e  $\mathbf{u}$  un vettore direttore della retta, il piano è individuato dai vettori di giacitura  $\overrightarrow{AP}$  e  $\mathbf{u}$  e dal punto  $P$ .

### Piano individuato da due rette incidenti

I vettori direttori delle due rette danno due vettori di giacitura del piano, il loro punto di intersezione (o un qualunque altro punto su una delle due rette) individua un punto del piano.

### Retta per un punto e parallela a due piani non paralleli

Basta trovare la retta intersezione dei due piani: un suo vettore direttore è anche vettore direttore della retta cercata, che sarà individuata dall'ulteriore condizione di passare per il punto dato.

### Retta per un punto e perpendicolare a una retta esterna al punto

Detti  $A(x_A, y_A, z_A)$  il punto e  $x = \lambda t + \alpha; y = \mu t + \beta; z = \nu t + \gamma$  l'equazione parametrica della retta  $r$ , il punto  $Q(x, y, z)$ , proiezione di  $A$  su  $r$ , è individuato dalla condizione che  $\overrightarrow{QA}$  sia perpendicolare a  $(\lambda, \mu, \nu)$ . La condizione, usando il prodotto scalare, si scrive:

$$(\lambda t + \alpha - x_A)\lambda + (\mu t + \beta - y_A)\mu + (\nu t + \gamma - z_A)\nu = 0.$$

Da qui si trova il punto  $Q$ : l'equazione della retta cercata è ora quella della retta per 2 punti.

## 6.12. Esercizi

**Esercizio 6.7.** Verificare se i tre piani  $x - y - z = 0$ ,  $x - 2z - 1 = 0$ ,  $y - z + 5 = 0$  si intersecano a due a due in tre rette parallele distinte.

**Esercizio 6.8.** Date le rette  $r$  ed  $s$  di equazioni rispettive

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2z - 1 = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 2t + 5 \\ z = 1 - 2t \end{cases},$$

determinare, se esiste, il piano passante per  $s$  e parallelo a  $r$ .

**Esercizio 6.9.** Date le rette  $r$  ed  $s$ , di equazioni rispettive

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 4 \\ z = (1/2)t - 1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = t + 5 \\ y = 2t + 1 \\ z = -t - 3 \end{cases},$$

determinare, se esiste, il piano passante per  $P(1, 1, 1)$  e parallelo alle due rette.

**Esercizio 6.10.** Sia  $r$  la retta di equazioni

$$\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t \\ z = 2 - t \end{cases}.$$

Determinare, se possibile, un punto  $P$  su  $r$ , in modo che  $\overrightarrow{OP}$  sia parallelo al piano di equazione  $x - y + z = 0$ .

**Esercizio 6.11.** Sono dati i punti  $A(0, 0, 1)$ ,  $B(3, 0, 0)$ ,  $C(0, 5, 0)$ . Determinare l'equazione del piano che li contiene. Determinare l'equazione della retta perpendicolare per  $A$  al piano trovato. Determinare l'equazione della retta per  $C$  parallela alla retta  $AB$ . Determinare le equazioni parametriche delle rette intersezioni del piano prima trovato con i piani coordinati.

## 6.13. Un esercizio conclusivo risolto e commentato

**Esercizio 6.12.** Sono date le due rette:

$$r: \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}, \quad s: \begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

Determinarne le equazioni parametriche. Provare che si tratta di due rette sghembe. Determinare l'equazione di un piano  $\varrho$  per  $r$  e parallelo ad  $s$  e l'equazione di un piano  $\sigma$  per  $s$  e parallelo ad  $r$ . Determinare la minima distanza tra le due rette. Determinare l'equazione della perpendicolare comune alle due rette. Determinare le equazioni delle rette  $r'$  ed  $s'$ , proiezioni di  $r$  ed  $s$  rispettivamente su  $\sigma$  e  $\varrho$ .

Le equazioni parametriche si trovano subito, per esempio ponendo  $x = t$  nel primo sistema,  $x = u$  nel secondo e ricavando, in entrambi,  $y$  e  $z$  in funzione di  $t$  o  $u$ . Si ottiene facilmente:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2t \end{cases}, \quad s: \begin{cases} x = u \\ y = 2u - 1 \\ z = -u \end{cases}.$$

I vettori  $\mathbf{u} = (1, -1, 2)$  e  $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$  risultano paralleli alle due rette e non paralleli tra di loro, quindi le due rette non sono parallele. Infatti

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} \neq \mathbf{0}.$$

Per controllare che sono sghembe ci basta allora controllare che non hanno punti in comune. Usando le equazioni cartesiane si tratta di risolvere il sistema

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x - z = 0 \\ 2x - y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}.$$

Le matrici completa e incompleta sono:

$$A|b = \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Poichè  $\text{rg}(A|b) = 4$  (mentre  $\text{rg}(A) < 4$  necessariamente), il sistema non è compatibile. Le due rette sono sghembe.

I due vettori  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  prima trovati, non essendo paralleli, individuano la giacitura dei piani cercati. Poiché il punto  $A(0, 0, 0)$  appartiene ad  $r$ , e quindi a  $\rho$ , mentre il punto  $B(0, -1, 0)$  appartiene ad  $s$ , e quindi a  $\sigma$ , le equazioni dei due piani sono immediate:

$$\rho: \begin{cases} x = u + v \\ y = -u + 2v \\ z = 2u - v \end{cases}, \quad \sigma: \begin{cases} x = u' + v' \\ y = -u' + 2v' - 1 \\ z = 2u' - v' \end{cases}.$$

Per trovare la minima distanza tra le due rette, basta ora trovare la distanza tra i due piani. Si prende un punto in uno dei due piani, per esempio  $A$  su  $\rho$ , si trova la retta  $l$  per esso e perpendicolare all'altro piano, infine si trova l'intersezione di  $l$  con l'altro piano, diciamola  $Q$ :  $\overline{AQ}$  è la distanza richiesta. un vettore perpendicolare al piano l'abbiamo già trovato facendo il prodotto vettoriale tra  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$ :  $\mathbf{n} = (-3, 3, 3)$ , ma si può anche prendere  $\mathbf{n}' = (-1, 1, 1)$  in quanto  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{n}'$  sono ovviamente paralleli. La retta  $l$  è allora:

$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}.$$

Per trovarne l'intersezione con  $\sigma$  si può considerare il sistema tra le due equazioni:

$$\begin{cases} -t = u' + v' \\ t = -u' + 2v' - 1 \\ t = 2u' - v' \end{cases},$$

che ha come soluzione  $t = -1/3$ ,  $u' = 0$ ,  $v' = 1/3$ . Il punto  $Q$  è dunque  $Q(1/3, -1/3, -1/3)$ . La distanza cercata è

$$\overline{AQ} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Si sarebbe anche potuto trovare prima l'equazione cartesiana (implicita) del piano  $\sigma$  che è del tipo  $-x + y + z + \delta = 0$ ; per trovare  $\delta$  si impone il passaggio per  $B(0, -1, 0)$ , ottenendo  $\delta = 1$ :  $-x + y + z + 1 = 0$ . A questo punto il sistema tra la retta  $l$  e il piano  $\sigma$  fornisce l'equazione  $t + t + t + 1 = 0$ , che produce lo stesso punto  $Q$  già trovato.

Per trovare la perpendicolare comune la cosa più semplice è osservare che detti  $R$  ed  $S$  i punti, rispettivamente su  $r$  e su  $s$ , per cui deve passare la perpendicolare comune, il vettore  $\overrightarrow{RS}$  deve essere perpendicolare a entrambe le rette, e quindi parallelo al vettore  $\mathbf{n}$  (o, il che è lo stesso, a  $\mathbf{n}'$ ). Scriviamo la condizione di parallelismo:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ u-t & 2u+t-1 & -u-2t \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \Rightarrow \begin{cases} 2u+t-1+u-2t=0 \\ u+2t-u-t=0 \\ u-t+2u+t-1=0 \end{cases}.$$

In realtà delle tre equazioni in  $u$  e  $t$  una è superflua; comunque la risoluzione del sistema, anche scrivendole tutte tre, è immediata e porge  $t = 0$ ;  $u = 1/3$ . Da qui si trovano i punti  $R$  ed  $S$  cercati  $R(0, 0, 0)$ ,  $S(1/3, -1/3, -1/3)$ , che sono gli stessi punti  $A$  e  $B$  trovati sopra (ma è un mera coincidenza!). La scrittura della perpendicolare comune è, a questo punto, immediata. Un suo vettore direttore è proprio  $\overrightarrow{RS} = (1/3, -1/3, -1/3)$ , ma potrebbe anche essere  $\mathbf{n}$ , o, meglio ancora (perchè è più semplice!),  $\mathbf{n}'$ , e un suo punto è, per esempio,  $R$ :

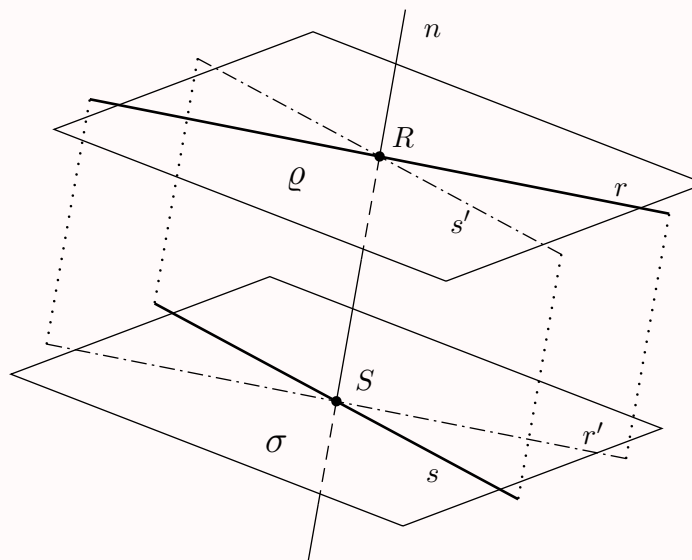
$$\begin{cases} x = -t \\ y = t \\ z = t \end{cases}.$$

A questo punto per scrivere le equazioni delle rette  $r'$  ed  $s'$  basta osservare che sono le

rette parallele ad  $r$  e  $s$  per  $S$  ed  $R$  rispettivamente:

$$r': \begin{cases} x = t + 1/3 \\ y = -t - 1/3 \\ z = 2t - 1/3 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = u \\ y = 2u \\ z = -u \end{cases}.$$

Nella figura 6.7 è rappresentata schematicamente la situazione proposta in questo esercizio.



**Figura 6.7:** Rette sghembe e perpendicolare comune

Si noti che, quando si ha a che fare contemporaneamente con più rette o più piani, è conveniente usare nomi diversi per i parametri, come è stato fatto nella risoluzione di questo esercizio.