Cenno alle affinità: la via analitica

Luciano Battaia [*]

20 febbraio 2012

Scopo di questo articolo è di presentare le caratteristiche essenziali delle affinità nel piano, facendo riferimento esclusivamente alla via analitica, piuttosto che a quella sintetica. Spesso si fa uso del calcolo matriciale, che facilita molto la trattazione. In ogni caso il contenuto è fruibile anche da parte di coloro che non conoscono i pochi rudimenti di algebra lineare richiesti. Il lavoro non ha alcuna pretesa di completezza e sistematicità. In particolare non sono di norma proposte le dimostrazioni dei risultati via via presentati, tranne alcuni casi particolarmente significativi che possono servire da utile esercizio.

Indice

[*] http://www.batmath.it

1 Trasformazioni del piano in sè

Definizione 1 (Trasformazioni del piano in sè)**.** *Sia dato, in un piano* π*, un riferimento cartesiano ortonormale. Una qualunque funzione* f *del piano in sè, cioè una funzione che associa ad ogni punto del piano un altro punto del piano si chiama una* trasformazione del piano in sè.

Poiché abbiamo fissato un riferimento cartesiano, per assegnare la funzione basterà assegnare una regola per calcolare le coordinate di $P' = f(P)$, a partire da quelle di P, ovvero basterà considerare una funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Esempio 1. Un esempio di funzione di questo genere è il seguente, dove abbiamo indicato con (x', y') le coordinate di P' (punto immagine) e con (x, y) quelle di P, notazioni che useremo regolarmente in seguito.

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & x^2 - y + 2 \\ y' & = & \mathrm{e}^x + y^2 \end{array}\right. . \tag{1}$$

Potremo anche scrivere

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2}$$

ove abbiamo preferito la scrittura delle coppie di numeri reali in colonna anziché in riga, in accordo con le notazioni comuni nell'algebra lineare. Si noti che, nella sostanza, per assegnare la funzione f abbiamo dovuto assegnare 2 funzioni: la prima alla coppia (x, y) fa corrispondere la prima coordinata, x', del punto trasformato, la seconda fa corrispondere alla coppia (x, y) la seconda coordinata, y', del punto trasformato. Come d'abitudine, chiameremo queste due funzioni le *componenti* della funzione f.

La figura che segue illustra, su alcuni punti, come opera questa funzione. Sono rappresentati 3 punti, P_1, P_2, P_3 e le loro immagini P_1', P_2', P_3', collegati da una linea tratteggiata al solo scopo di rendere evidente l'azione della funzione.

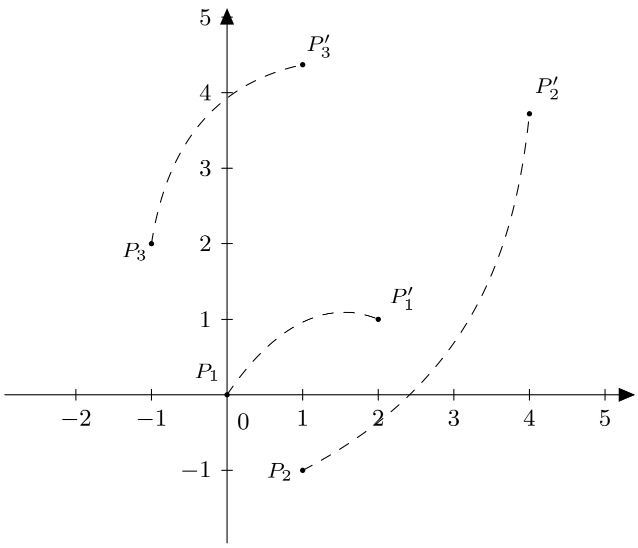

Figura 1 *Alcuni punti e le loro immagini, tramite la trasformazione dell'esempio* 1.

Nell'esempio considerato abbiamo rappresentato solo tre punti e le loro immagini, e ovviamente non sarebbe stato possibile rappresentare tutti i punti e le loro immagini. Nelle applicazioni ha molto interesse valutare le relazioni che intercorrono tra certi insiemi di punti del piano e i loro trasformati mediante funzioni come la (1), in particolare quando questi insiemi di punti sono figure geometriche come rette, circonferenze, ecc. Per trasformazioni del tutto generali come la (1) le figure trasformate non mantengono nessuna delle caratteristiche delle figure originarie.

Ci occuperemo in questo articolo delle trasformazioni in cui entrambe le funzioni che compongono la f sono di primo grado in x e y, con qualche ulteriore condizione: le chiameremo *affinità*.

Prima di procedere vogliamo però porre l'attenzione su un fatto molto importante. Trattando delle trasformazioni del piano in sè, cioè di funzioni di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, *non* siamo interessati a trattare il grafico della funzione f: questo grafico[1] non può avere alcuna rappresentazione nel senso tradizionale del termine, in quanto servirebbe un sistema di 4 assi cartesiani (magari ortogonali), cosa chiaramente impossibile nello spazio tridimensionale. Quello a cui siamo interessati è piuttosto l'aspetto geometrico di particolari sottoinsiemi del dominio e dei loro insiemi immagini.

2 Affinità nel piano

La più generica trasformazione del piano in sè, rappresentabile mediante funzioni di primo grado nelle variabili x e y si può scrivere nella forma

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax+by+p \\ y' & = & cx+dy+q \end{array}\right. . \tag{3}$$

Queste funzioni sono spesso chiamate *lineari*, anche se il termine è improprio, in quanto una funzione lineare di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ è del tipo

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax+by \\ y' & = & cx+dy \end{array}\right. , \tag{4}$$

cioè, rispetto alle (3), è priva dei *termini noti*. Meglio sarebbe chiamarla, anche in vista di quanto diremo, *funzione affine* e noi ci atterremo a questa nomenclatura.

Posto

$$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\,,\quad \vec{u}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\,,\quad \vec{u}'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\,,\quad \vec{\tau}=\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}\,, \tag{5}$$

le (3) si possono scrivere, in forma matriciale compatta,

$$\vec{u}' = A\vec{u}+\vec{\tau}. \tag{6}$$

Definizione 2 (Affinità)**.** *Si dicono* affinità *(nel piano) le trasformazioni del tipo* (3)*, oppure del tipo* (6)*, che godano dell'ulteriore importante proprietà*

$$\det(A)\neq 0\,,\quad \textit{ovvero}\quad ad-bc\neq 0\,. \tag{7}$$

La proprietà (7) garantisce che la trasformazione è biunivoca e quindi *invertibile*, ovvero che è sempre possibile ricavare (x,y) da (x',y'). Se si usa la scrittura matriciale questo calcolo è (almeno formalmente) immediato:

$$\vec{u}' = A\vec{u}+\vec{\tau} \;\Rightarrow\; A\vec{u}=\vec{u}'-\vec{\tau} \;\Rightarrow\; A^{-1}A\vec{u}=A^{-1}\big(\vec{u}'-\vec{\tau}\big)\,,$$

ovvero

$$\vec{u}=A^{-1}\big(\vec{u}'-\vec{\tau}\big)\,. \tag{8}$$

[1] Il grafico può essere definito analiticamente come l'insieme delle coppie $\big((x,y),(x',y')\big)$, ovvero delle quaterne (x,y,x',y').

Comunque anche procedendo direttamente sulle (3), per esempio (con qualche cautela) per sostituzione, si ricavano facilmente le formule inverse, che sono dello stesso tipo:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a'x+b'y+p' \\ y & = & c'x+d'y+q' \end{array}\right. , \tag{9}$$

con

$$a'd'-b'c'=\frac{1}{ad-bc}\neq 0\,, \quad \text{ovvero} \quad \det\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d'\end{pmatrix}=\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det(A)}\neq 0\,. \tag{10}$$

Definizione 3 (Affinità inversa)**.** *L'affinità espressa dalle* (8) *oppure dalle* (9) *si chiama* affinità inversa *della* (3)*, e si indica con* f^{-1}*, se la* (3) *era indicata con* f*.*

Osservazione 4. È molto importante osservare che le formule (3) consentono di ottenere le coordinate dei punti trasformati (o immagine) a partire dalle coordinate dei punti originari, mentre le formule (9) consentono, oltre naturalmente a ricavare le coordinate dei punti originari a partire da quelle dei punti trasformati, *soprattutto* di ottenere le trasformate delle equazioni di luoghi geometrici del piano. L'esempio che segue chiarisce questa osservazione.

Esempio 2. Sia data la trasformazione

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x-y+1 \\ y' & = & x+y \end{array}\right. , \tag{11}$$

che risulta essere un'affinità perché $2\times 1-(-1)\times 1=3\neq 0$. Con calcoli standard si ottiene

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{3}x'+\frac{1}{3}y'-\frac{1}{3} \\ y & = & -\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3} \end{array}\right. . \tag{12}$$

Utilizzando le (11) si ottiene, per esempio, che l'immagine del punto $P=(-1,2)$ è il punto $P'=(-3,1)$. Utilizzando invece le (12) si ottiene, intanto, che per esempio il punto $P'=(0,0)$ è immagine del punto $P=(-1/3,1/3)$, ma, *soprattutto* che se considero un'equazione come $x^2+y^2-1=0$ (circonferenza di centro l'origine e raggio 1), essa si trasforma nell'equazione

$$\left(\frac{1}{3}x'+\frac{1}{3}y'-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}x'+\frac{2}{3}y'+\frac{1}{3}\right)^2-1=0\,,$$

ovvero

$$2x'^2+5y'^2-2x'y'-4x'+2y'-7=0\,,$$

che rappresenta un'ellisse, mostrata nella figura 2.

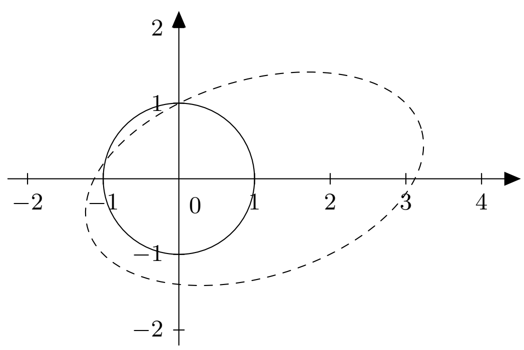

Figura 2 *Circonferenza e sua immagine tramite la trasformazione dell'esempio 2.*

Per le affinità si può dimostrare il seguente teorema, che elenca le proprietà di cui gode questo tipo di trasformazioni del piano in sè.

Teorema 5.

1. *L'immagine di una retta è sempre una retta.*
2. *L'immagine di una conica è sempre una conica.*
3. *A rette parallele corrispondono rette parallele.*
4. *A rette incidenti corrispondono rette incidenti.*
5. *Il rapporto delle aree di regioni corrispondenti è costante, si chiama* rapporto di affinità *e vale*
$$r_a = |ad - bc| = |\det(A)|.$$
6. *Le affinità conservano il punto medio dei segmenti, nel senso che se M è il punto medio di AB, M' è il punto medio di $A'B'$.*

La dimostrazione delle prime due proprietà è immediata, in quanto le (9) sono funzioni di primo grado.

Definizione 6 (Affinità dirette e inverse)**.** *Se* $\det(A) > 0$ *l'affinità si dice* diretta*, se* $\det(A) < 0$ *l'affinità si dice* inversa*.*

Dalle proprietà sopra enunciate, e tenendo conto che l'inversa di un'affinità è ancora un'affinità, si deduce subito che un triangolo non degenere si trasforma in un triangolo non degenere. Vediamo su due esempi uno dei motivi della nomenclatura utilizzata nella definizione 6.

Esempio 3. L'affinità, già considerata nell'esempio 2,

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + 1 \\ y' &= x + y \end{cases},$$

è diretta, in quanto $\det(A) = 3$. Il triangolo di vertici $A = (-1, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, -2)$ e il suo trasformato di vertici $A' = (-1, -1)$, $B' = (5, 2)$, $C' = (3, -2)$ hanno lo stesso orientamento (antiorario) del bordo.

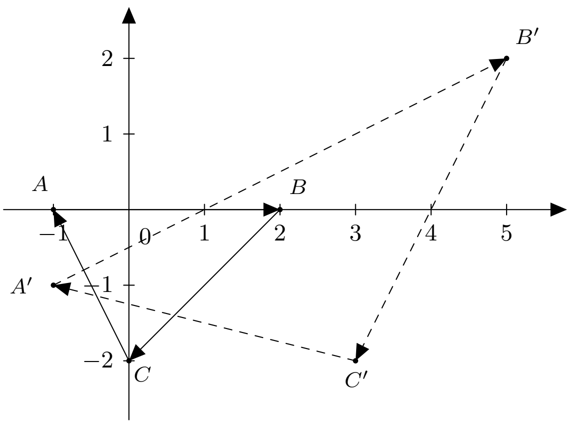

Figura 3 *Affinità diretta.*

Esempio 4. L'affinità

$$\begin{cases} x' &= 2x - y + 1 \\ y' &= x - y \end{cases},$$

è inversa, in quanto $\det(A) = -1$. Il triangolo di vertici $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ e il suo trasformato di vertici $A' = (1, 0)$, $B' = (3, 1)$, $C' = (0, 1)$ hanno orientamento del bordo opposto.

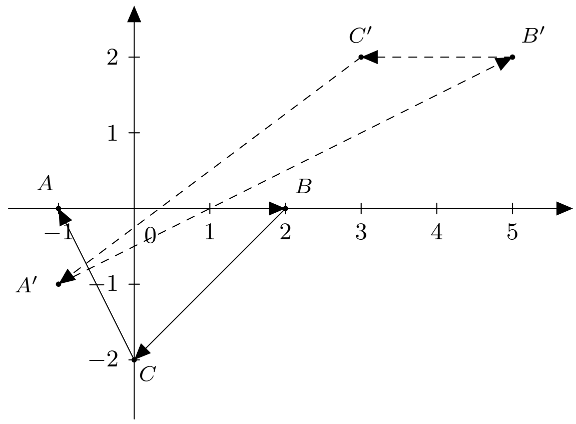

Figura 4 *Affinità inversa.*

3 Il gruppo delle affinità

Date due affinità

$$(13)\qquad f\colon \begin{cases} x' &= a_1x + b_1y + p_1 \\ y' &= c_1x + d_1y + q_1 \end{cases} \quad \text{e} \quad g\colon \begin{cases} x' &= a_2x + b_2y + p_2 \\ y' &= c_2x + d_2y + q_2 \end{cases},$$

si possono considerare le affinità composte $h = f \circ g$ e $k = g \circ f$. L'affinità h si ottiene sostituendo in f ad x e y rispettivamente $a_2x + b_2y + p_2$ e $c_2x + d_2y + q_2$. L'affinità k si ottiene invece sostituendo in g ad x e y rispettivamente $a_1x + b_1y + p_1$ e $c_1x + d_1y + q_1$. Come risulta ovvio, e come di solito succede quando si considera la composta di due funzioni, non vale la proprietà commutativa: $f \circ g \neq g \circ f$.

Con la scrittura matriciale tutto diventa più semplice. Date

$$(14)\qquad f\colon \quad \vec{u}' = A_1\vec{u} + \vec{\tau}_1 \quad \text{e} \quad g\colon \quad \vec{u}' = A_2\vec{u} + \vec{\tau}_2\,,$$

si ha

$$(15)\qquad f \circ g\colon \quad \vec{u}' = A_1\left(A_2\vec{u} + \vec{\tau}_2\right) + \vec{\tau}_1 = A_1A_2\vec{u} + A_1\vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_1\,,$$

e

$$(16)\qquad g \circ f\colon \quad \vec{u}' = A_2\left(A_1\vec{u} + \vec{\tau}_1\right) + \vec{\tau}_2 = A_2A_1\vec{u} + A_2\vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2\,,$$

espressioni che rendono subito evidente la non commutatività (legata, tra l'altro, alla non commutatività del prodotto matriciale) e che inoltre mostrano come la matrice della trasformazione composta sia il prodotto delle matrici delle due trasformazioni.

Naturalmente l'operazione di composizione gode della proprietà associativa, come sempre succede nella composizione di funzioni e come si può verificare facilmente per calcolo diretto (molto più semplice con la scrittura in forma matriciale). Questo significa che, date tre affinità, f, g, h si ha

$$(17)\qquad (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)\,.$$

Nell'insieme delle affinità esiste anche l'elemento neutro, dato dalla *trasformazione identica*:

$$(18) \qquad id\colon \begin{cases} x' &= x \\ y' &= y \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \vec{u}' = I\vec{u} + \vec{0}\,,$$

dove I è la matrice unità e $\vec{0}$ è il vettore nullo:

$$(19) \qquad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se si tiene conto che, come già detto, ogni affinità ha un'inversa (in ragione del fatto che $\det(A) \neq 0$), si conclude subito che l'insieme delle affinità nel piano costituisce un *gruppo non abeliano.*

4 Elementi uniti

Definizione 7 (Punti uniti)**.** *Data una funzione $f\colon A \to A$ si chiama* punto fisso *o* punto unito *di f, un elemento x_0 di A che coincide con la sua immagine: $f(x_0) = x_0$.*

Questo concetto ha un notevole interesse in molti campi, tra cui quello delle affinità. Citiamo, perché molto famoso e importante, un teorema relativo ai punti fissi, in un caso molto particolare, quello delle funzioni reali da $[0,1]$ in $[0,1]$:

Teorema 8 (di Brouwer, *caso particolare*)**.** *Ogni funzione continua*

$$f\colon [0,1] \to [0,1]$$

ha almeno un punto fisso.

In questo caso elementare il teorema è graficamente evidente e si può enunciare così: una qualunque funzione continua il cui grafico parta da un punto dell'asse y, con $0 \le y \le 1$, e arrivi su un punto della retta $x = 1$, sempre con $0 \le y \le 1$, incontra almeno una volta la bisettrice del primo e terzo quadrante.

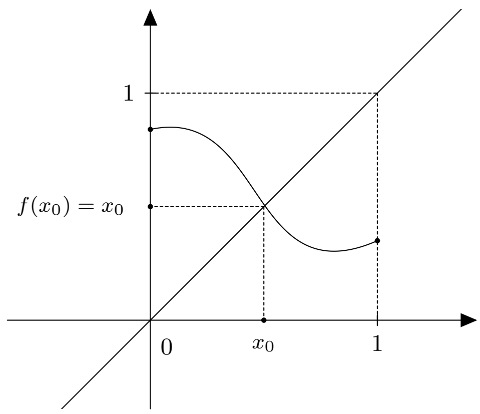

Figura 5 *Punto fisso per una funzione continua.*

È chiaro che la determinazione degli eventuali punti fissi di una funzione si fa risolvendo l'equazione

$$(20) \qquad f(x) = x\,.$$

Nel caso delle affinità, dove non è affatto detto che esistano punti uniti, si procederà esattamente allo stesso modo: basterà imporre che

$$\left\{\begin{array}{rcl} ax+by+p & = & x \\ cx+dy+q & = & y \end{array}\right. . \tag{21}$$

Esempio 5. Si determinino gli eventuali punti uniti della affinità seguente.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+y+1 \\ y' & = & 3x-y \end{array}\right. .$$

Procedendo come indicato, si dovrà risolvere il sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x+y+1 \\ y & = & 3x-y \end{array}\right. .$$

Si trova facilmente l'unico punto $P = (-2/3, -1)$.

Esempio 6. Si determinino gli eventuali punti uniti della affinità seguente.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -y+1 \\ y' & = & -x+1 \end{array}\right. .$$

Procedendo come indicato, si dovrà risolvere il sistema

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -y+1 \\ y & = & -x+1 \end{array}\right. .$$

Si vede subito che sono uniti tutti i punti della retta $x + y - 1 = 0$: in questo caso dunque i punti uniti sono infiniti. Naturalmente questa retta si potrà anche chiamare *retta* (puntualmente) *unita*.

Oltra agli elementi uniti nelle applicazioni hanno anche interesse le figure, in particolare le rette, i cui punti vengono trasformati in altri punti della stessa figura. Precisamente si dà la seguente definizione.

Definizione 9 (Rette globalmente unite)**.** *Si chiama* retta globalmente unita *una retta i cui punti hanno immagine appartenente alla retta stessa.*

In sostanza data una retta $ax+by+c = 0$ si tratta di verificare se, applicando una data affinità, cioè sostituendo ad x e y le loro espressioni in funzione di x' e y' (affinità inversa), si ottiene ancora la stessa retta, ovvero $kax' + kay' + kb = 0$, con k costante non nulla. Di solito si preferisce lavorare con le rette in forma esplicita, per cui, data la retta $y = mx + q$ e sostituendo in essa ad x e y le loro espressioni in funzione di x' e y', si tratta di verificare che si ottiene una retta con lo stesso coefficiente angolare e con la stessa ordinata all'origine. In questo caso bisognerà però verificare a parte se una retta parallela all'asse y ($x = h$) è o no globalmente unita, cioè si trasforma nella retta $x' = h$. Naturalmente si potrebbe anche utilizzare il procedimento inverso, cioè data la retta $y' = mx' + q$ e sostituendo in essa ad x' e y' le loro espressioni in funzione di x e y si tratta di verificare che si ottiene una retta con lo stesso coefficiente angolare e con la stessa ordinata all'origine.

Esempio 7. Si determinino le eventuali rette globalmente unite nell'affinità seguente, già considerata nell'esempio 5.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & x+y+1 \\ y' & = & 3x-y \end{array}\right. .$$

Determiniamo intanto l'affinità inversa, procedendo come più sopra indicato. Si trova:

$$\begin{cases} x &= \dfrac{1}{4}x' + \dfrac{1}{4}y' - \dfrac{1}{4} \\ y &= \dfrac{3}{4}x' - \dfrac{1}{4}y' - \dfrac{3}{4} \end{cases} .$$

Una retta del tipo $x = h$ viene mutata in

$$\frac{1}{4}x' + \frac{1}{4}y' - \frac{1}{4} = h\,,$$

che non è del tipo $x' = h$. Prendiamo allora una retta non verticale $y = mx + q$ e sostituiamo i valori di x e y appena trovati:

$$\frac{3}{4}x' - \frac{1}{4}y' - \frac{3}{4} = m\left(\frac{1}{4}x' + \frac{1}{4}y' - \frac{1}{4}\right) + q.$$

Eseguendo i calcoli e semplificando si trova:

$$(3-m)x' - (1+m)y' - 3 - 4q + m = 0\,.$$

Il valore $m = -1$ produce una retta trasformata verticale, che dunque non soddisfa le ipotesi (visto che la retta originaria non lo era); per $m \neq -1$ si trova

$$y' = \frac{3-m}{1+m}x' + \frac{m-3-4q}{1+m}\,.$$

Si deve dunque avere

$$m = \frac{3-m}{1+m} \quad \wedge \quad \frac{m-3-4q}{1+m} = q.$$

Si trovano facilmente le due soluzioni

$$m = -3,\ q = -3 \quad \vee \quad m = 1, q = -\frac{1}{3}\,.$$

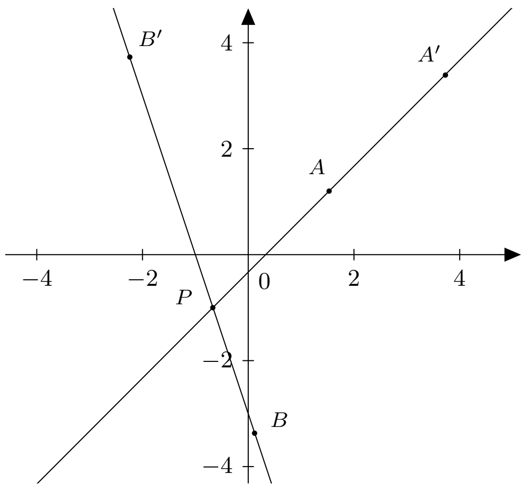

Figura 6 *Elementi uniti per l'affinità dell'esempio 7: A e A', B e B' sono punti corrispondenti, P è punto unito. Le due rette indicate sono globalmente unite.*

Si osservi che il punto $P = (-2/3, -1)$, che nell'esempio 5 si è dimostrato essere unito per l'affinità che stiamo studiando, è punto di intersezione delle due rette globalmente unite

$$r\colon \quad y = -3x - 3 \quad \text{ed} \quad s\colon \quad y = x - \frac{1}{3}$$

appena trovate. La cosa è ovvia: se ogni punto della retta r viene trasformato in un altro punto della stessa retta r, e lo stesso succede per la retta s, il punto P, comune ad r e s, deve avere immagine contemporaneamente su r e su s, cioè deve essere unito.

Procedendo in senso inverso, data la retta non verticale $y' = mx' + q$, sostituiamo i valori di x' e y' con le loro espressioni date in funzione di x ed y. Procedendo come sopra, dopo semplificazione si ottiene:

$$y = \frac{3-m}{1+m}x - \frac{m+q}{1+m},$$

da cui

$$\frac{3-m}{1+m} = m \quad \wedge \quad -\frac{m+q}{1+m} = q,$$

che produce gli stessi valori di prima per m e q.

5 Similitudini

Occupiamoci ora di un particolare tipo di affinità, che gode di qualche ulteriore proprietà rispetto alle generiche affinita.

Definizione 10 (Similitudini)**.** *Una affinità*

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ax + by + p \\ y' & = & cx + dy + q \end{array}\right. \tag{22}$$

in cui

$$|a| = |d| \quad \wedge \quad |b| = |c| \tag{23}$$

si chiama una similitudine.

Se teniamo conto che $\det(A) = ad - bc \neq 0$, si può dedurre da (23) che le similitudini sono del tipo

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ax - by + p \\ y' & = & bx + ay + q \end{array}\right. , \tag{24}$$

cioè con gli elementi della diagonale principale uguali e quella della diagonale secondaria opposti, oppure del tipo

$$\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & ax + by + p \\ y' & = & bx - ay + q \end{array}\right. , \tag{25}$$

cioè con gli elementi della diagonale principale opposti e quella della diagonale secondaria uguali. Il rapporto di affinità è, in entrambi i casi, $r_a = a^2 + b^2$. Naturalmente una similitudine del tipo (24) si dirà *diretta*, una del tipo (25) si dirà *indiretta*.

Definizione 11. *Il numero* $k = \sqrt{a^2 + b^2}$ *si chiama* rapporto di similitudine.

In forma matriciale le (24) e (25) si scrivono

$$(26)\qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Vale il seguente teorema che descrive le proprietà delle similitudini, in aggiunta a quelle delle generiche affinità.

Teorema 12.

1. *Il rapporto delle lunghezze di segmenti corrispondenti è costante ed uguale al rapporto di similitudine k.*
2. *Le circonferenze sono mutate in circonferenze.*
3. *Le similitudini conservano gli angoli, nel senso che per ogni terna di punti A, B, C l'ampiezza, non necessariamente il verso, dell'angolo $A\hat{B}C$ è uguale all'ampiezza dell'angolo $A'\hat{B}'C'$.*

Esempio 8. Consideriamo la similitudine

$$(27)\qquad \begin{cases} x' &= x - 2y + 1 \\ y' &= 2x + y \end{cases}.$$

Si tratta di una similitudine diretta di rapporto di similitudine $k = \sqrt{5}$. Poiché, come detto, si conservano gli angoli e i rapporti tra i segmenti e i loro trasformati sono costanti, è ovvio che ogni triangolo viene mutato in un triangolo simile (eventualmente ruotato, traslato e con cambiamento di orientamento sul perimetro). La figura 7 illustra questa situazione.

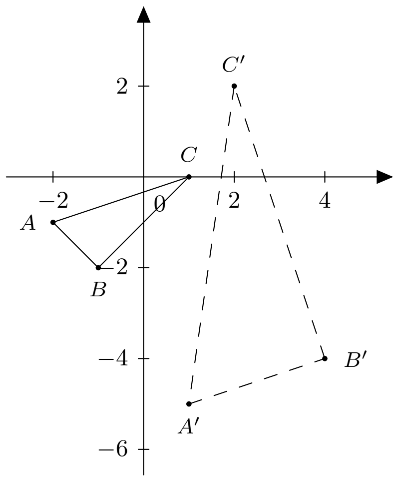

Figura 7 *Le similitudini mutano figure in figure simili.*

Si osservi (torneremo in seguito su questo fatto) che questa similitudine ha solo il punto $(0, 1/2)$ come punto fisso.

Per evidenziare il significato geometrico delle similitudini è utile riscrivere le equazioni (24) e (25), oppure (26), in un altro modo. Procederemo direttamente sulla matrice A, per comodità di scrittura. Poiché $k \neq 0$, si ha:

$$A = k\begin{pmatrix} \dfrac{a}{k} & -\dfrac{b}{k} \\ \dfrac{b}{k} & \dfrac{a}{k} \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = k\begin{pmatrix} \dfrac{a}{k} & \dfrac{b}{k} \\ \dfrac{b}{k} & -\dfrac{a}{k} \end{pmatrix}$$

Essendo

$$\left(\frac{a}{k}\right)^2 + \left(\frac{b}{k}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{k^2} = 1\,,$$

se ne deduce che $\exists\alpha$, con $0 \le \alpha < 2\pi$ tale che

$$\cos\alpha = \frac{a}{k} \quad \text{e} \quad \sin\alpha = \frac{b}{k}\,. \tag{28}$$

Dunque le equazioni di una generica similitudine possono scriversi in uno dei due modi seguenti:

$$\begin{cases} x' &= k(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + p \\ y' &= k(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + q \end{cases}, \tag{29}$$

oppure

$$\begin{cases} x' &= k(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + p \\ y' &= k(x\sin\alpha - y\cos\alpha) + q \end{cases}, \tag{30}$$

rispettivamente per le similitudini dirette e inverse e ove $k > 0$ è il rapporto di similitudine.

Esempio 9. Sia data la similitudine diretta

$$\begin{cases} x' &= x + 2y + 1 \\ y' &= -2x + y + 3 \end{cases} = \begin{cases} x' &= x - (-2)y + 1 \\ y' &= -2x + y + 3 \end{cases},$$

avente $k = \sqrt{5}$. Si noti che abbiamo riscritto la similitudine in modo da uniformarla al modello (24): ciò serve per l'interpretazione geometrica che ne ricaveremo. Per arrivare ad una scrittura del tipo (29) basterà trovare α tale che

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \wedge \quad \sin\alpha = \frac{-2}{\sqrt{5}}\,,$$

ovvero

$$\alpha = 2\pi + \arcsin\frac{-2}{\sqrt{5}} \simeq 5.18 \quad (\simeq 297°)\,.$$

Si sarebbe anche potuto prendere

$$\alpha = \arcsin\frac{-2}{\sqrt{5}} \simeq -1.11 \quad (\simeq -63°)\,,$$

se avessimo convenuto, per esempio, che $-\pi \le \alpha < \pi$.

Per concludere questa introduzione alle similitudini segnaliamo che si può dimostrare che vale il seguente teorema, che mostra la struttura dell'insieme delle similitudini.

Teorema 13. *L'insieme delle similitudini del piano costituisce un sottogruppo del gruppo delle affinità.*

6 Particolari similitudini: le omotetie

Definizione 14 (Omotetia)**.** *Una similitudine diretta in cui $b = 0$ si chiama una* omotetia*, di cui a si chiama* rapporto di omotetia*. Usando le (29) si può dire, in maniera equivalente, che un'omotetia è una similitudine diretta con $\alpha = 0 \vee \alpha = \pi$.*

Dunque le equazioni di una omotetia sono del tipo:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & ax+p \\ y' & = & ay+q \end{array}\right. , \quad a \neq 0 , \tag{31}$$

ovvero, in forma matriciale,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} , \quad A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} . \tag{32}$$

Si noti che il rapporto di similitudine è il modulo del rapporto di omotetia: $k = |a|$.

L'inversa di un'omotetia si trova immediatamente. Si ha

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \dfrac{1}{a}x' - \dfrac{p}{a} \\ y & = & \dfrac{1}{a}y - \dfrac{q}{a} \end{array}\right. . \tag{33}$$

Anche la ricerca degli elementi uniti di una omotetia è immediata:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & ax+p \\ y & = & ay+q \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{lcl} x(1-a) & = & p \\ y(1-a) & = & q \end{array}\right. ,$$

che, se $a \neq 1$, ha una e una sola soluzione

$$C = \left(\frac{p}{1-a} , \frac{q}{1-a} \right) , \quad \text{se} \quad a \neq 1 . \tag{34}$$

Definizione 15 (Centro di omotetia)**.** *Il punto C dato dalle* (34)*, per le omotetie di rapporto diverso da* 1*, si chiama* centro di omotetia.

Le omotetie con $a = 1$ rientrano nelle *traslazioni* di cui parleremo in seguito. Le omotetie con $a = -1$ rientrano nelle *rotazioni* (in particolare nei mezzigiri o simmetrie centrali), di cui parleremo in seguito.

Esempio 10. Sia data l'omotetia

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & 2x+1 \\ y' & = & 2y-2 \end{array}\right. .$$

L'unico punto unito è $C = (-1, 2)$. Cerchiamo le rette globalmente unite, cominciando da quelle verticali, $x' = h$. Sostituendo si trova

$$2x + 1 = h \quad \Rightarrow \quad x = \frac{h-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{h-1}{2} = h \quad \Rightarrow \quad h = -1 .$$

Passiamo alle rette non verticali $y' = mx' + q$. Sostituendo si trova

$$2y - 2 = m(2x+1) + q \quad \Rightarrow \quad y = mx + \frac{2+m+q}{2} ,$$

da cui si deduce che m può assumere qualunque valore, mentre $q = m + 2$. Si tratta delle rette $y = m(x + 1) + 2$, ovvero di tutte le rette (tranne la verticale) del fascio di centro $C = (-1, 2)$. Se aggiungiamo la retta verticale precedentemente trovata, troviamo che sono globalmente unite tutte le rette del fascio di centro C.

Vediamo ora come cambiano alcune figure (per esempio i triangoli) del piano: la figura 8 mostra, senza bisogno di commenti, che cosa succede.

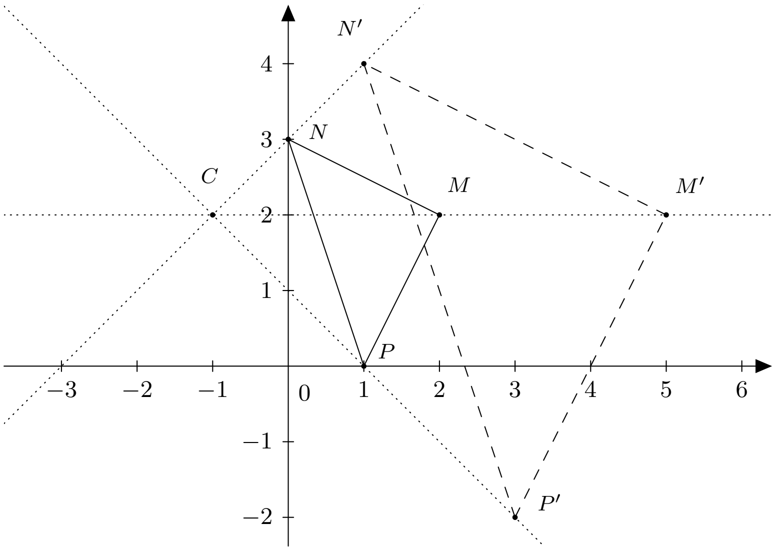

Figura 8 *L'omotetia dell'esempio 10.*

Le proprietà viste nell'esempio 10 sono comuni a tutte le omotetie, come afferma il seguente teorema.

Teorema 16. *Le omotetie di rapporto $a \neq 1$ hanno un unico punto unito, C; tutte le rette per C sono globalmente unite. Le omotetie conservano le direzioni, nel senso che se r è una retta qualsiasi, la sua trasformata è una retta parallela ad r. Se $a > 0$ un punto P e il suo trasformato P' si trovano sulla stessa semiretta di origine C, se $a < 0$ un punto P e il suo trasformato P' si trovano sulle semirette opposte di origine C.*

In sostanza le omotetie dilatano o contraggono le figure rispetto al centro di omotetia, mantenendone la forma. Tenendo anche conto delle proprietà delle similitudini, che naturalmente sono conservate dalle omotetie, si deduce facilmente che se $a = -1$ le omotetie sono semplicemente delle simmetrie centrali rispetto al centro di omotetia, argomento che tratteremo in seguito, se $|a| > 1$ dilatano la figura, se $(0 <)\,|a| < 1$ contraggono la figura.

7 Particolari similitudini: le isometrie

Definizione 17. *Le similitudini con rapporto di similitudine $k = 1$ si chiamano* isometrie. *In particolare quelle con* $\det(A) = a^2 + b^2 = 1$ *si dicono isometrie dirette, quelle con* $\det(A) = -a^2 - b^2 = -1$ *si dicono isometrie inverse.*

Il nome è chiaramente legato al fatto che, essendo $k = 1$, le lunghezze dei segmenti si mantengono nella trasformazione, e quindi le figure geometriche restano inalterate sia nella forma che nelle misure per effetto di una isometria.

Si noti che una similitudine con $\det(A) = \pm 1$ è un'isometria, ma che, invece, una generica affinità con $\det(A) = \pm 1$ non è detto che sia un'isometria. Un esempio è fornito dalla trasformazione

$$\begin{cases} x' &= 2x + y \\ y' &= x + y \end{cases},$$

che ha determinante 1, ma che non è una similitudine e quindi nemmeno una isometria. Lo mostra chiaramente la figura che segue dove abbiamo rappresentato un triangolo e il suo trasformato: le aree sono uguali ($r_a = 1$), ma non si tratta chiaramente di una isometria.

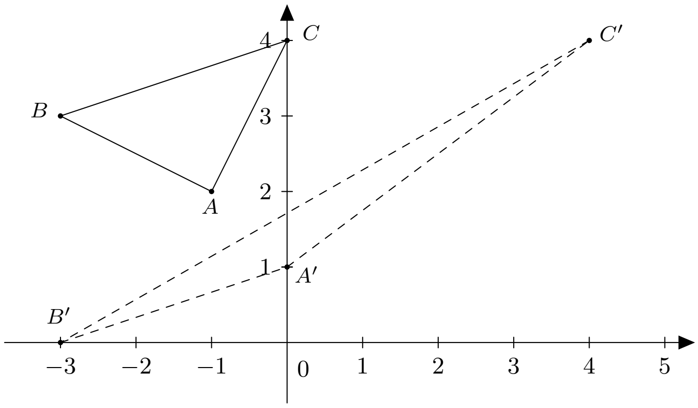

Figura 9 *Affinità che conserva le aree.*

Tenendo conto del fatto che $k = 1$, le equazioni delle isometrie si possono scrivere nella forma

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + p \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + q \end{cases}, \tag{35}$$

se sono isometrie dirette, e nella forma

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha + p \\ y' = x\sin\alpha - y\cos\alpha + q \end{cases}, \tag{36}$$

se sono isometrie inverse.

Per le isometrie vale il seguente teorema, che mostra la struttura dell'insieme delle isometrie.

Teorema 18. *L'insieme delle isometrie del piano costituisce un sottogruppo del gruppo delle similitudini.*

Esaminiamo ora in dettaglio le isometrie, a seconda delle caratteristiche della matrice A.

7.1 Traslazioni

Se la matrice A è la matrice identica, ovvero se $\alpha = 0$ con riferimento alle (35), l'isometria si scrive

$$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Come già osservato, questa trasformazione è anche un'omotetia, priva di punti uniti e con rapporto di omotetia 1. Le (37) mostrano che il punto P' è ottenuto dal punto P mediante la traslazione individuata dal vettore

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Nel caso particolare in cui $\vec{\tau} = \vec{0}$ la trasformazione stessa si riduce all'identità. Come è ovvio dal significato, e come si può verificare immediatamente, le traslazioni non hanno alcun punto unito. Naturalmente, invece, tutte le rette parallele al vettore $\vec{\tau}$ sono globalmente unite ("scorrono su se stesse").

Esempio 11. L'affinità

$$\begin{cases} x' = x+2 \\ y' = y-1 \end{cases}, \quad \text{ove} \quad \vec{\tau} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

è una traslazione di vettore $\vec{\tau}$. Nella figura che segue è illustrata la traslazione di un triangolo.

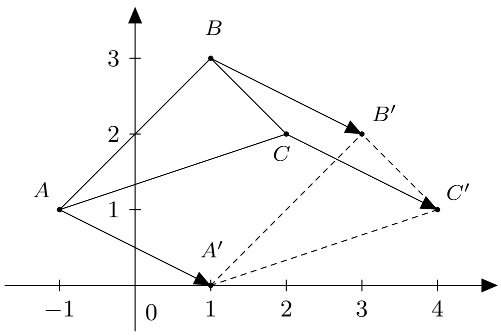

Figura 10 *La traslazione dell'esempio 11.*

Ovviamente l'inversa di una traslazione è ancora una traslazione, di vettore $-\vec{\tau}$. È immediato che l'insieme delle traslazioni è un gruppo (sottogruppo del gruppo delle isometrie).

7.2 Rotazioni

Consideriamo ora una isometria diretta con matrice diversa dalla matrice unità.

$$\begin{cases} x' = ax - by + p \\ y' = bx + ay + q \end{cases}, \quad \text{con} \quad \det(A) = a^2 + b^2 = 1 \tag{39}$$

In ragione delle osservazioni precedenti se ne deduce che questo tipo di isometrie si possono sempre scrivere nella forma:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + p \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha + q \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}, \tag{40}$$

con $0 < \alpha < 2\pi$: se $\alpha = 0$ la matrice A si riduce alla matrice unità e si ricade nel caso delle traslazioni.

Vale il seguente teorema.

Teorema 19. *Le isometrie del tipo (40), con $\alpha \neq 0$, hanno sempre un unico punto unito.*

Proponiamo la dimostrazione per coloro che conoscono la teoria dei sistemi lineari. Si deve avere

$$\begin{cases} x = x\cos\alpha - y\sin\alpha + p \\ y = x\sin\alpha + y\cos\alpha + q \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(1-\cos\alpha) + y\sin\alpha = p \\ -x\sin\alpha + y(1-\cos\alpha) = +q \end{cases}. \tag{41}$$

Si tratta di un sistema lineare di 2 equazioni in 2 incognite, con matrice dei coefficienti

$$M = \begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & 1-\cos\alpha \end{pmatrix},$$

avente determinante $2 - 2\cos\alpha \neq 0$, perché $\alpha \neq 0$. Il sistema ha dunque un'unica soluzione data da

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} p & \sin\alpha \\ q & 1-\cos\alpha \end{pmatrix}}{2-2\cos\alpha}, \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 1-\cos\alpha & p \\ -\sin\alpha & q \end{pmatrix}}{2-2\cos\alpha}. \tag{42}$$

Non è difficile provare, a questo punto, che le trasformazioni del tipo che stiamo considerando sono delle *rotazioni* di un angolo α attorno al punto dato dalle (42)[2], detto *centro della rotazione*.

Nel caso particolare $\alpha = \pi$, le (40) si riducono alle

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -x + p \\ y' & = & -y + q \end{array} \right. , \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} . \tag{43}
$$

In questo caso la rotazione prende il nome di *mezzogiro* attorno al centro di rotazione o, più comunemente, di *simmetria centrale* di centro il centro di rotazione. Questa trasformazione è anche una omotetia di centro il centro di rotazione e rapporto di omotetia -1.

Le circonferenze con centro nel centro di rotazione sono globalmente unite. Se $\alpha \neq \pi$ non esistono rette globalmente unite, se $\alpha = \pi$ tutte le rette passanti per il centro di rotazione sono globalmente unite (ovvio trattandosi di una particolare omotetia).

Per quanto riguarda la struttura dell'insieme delle rotazioni citiamo (senza ulteriori commenti) solo il fatto che le rotazioni attorno ad uno stesso punto formano gruppo, mentre in generale le rotazioni non formano gruppo.

In ogni caso, se teniamo conto che il prodotto di due affinità ha come matrice il prodotto delle matrici, possiamo osservare che se facciamo il prodotto di due rotazioni di angolo α e β rispettivamente, otteniamo come matrice del prodotto la matrice:

$$
\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix} = \\
&\qquad = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix} = \\
&\qquad\qquad = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & +\cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} ,
\end{aligned} \tag{44}
$$

ovvero che il prodotto di due rotazioni, anche con centro diverso, produce una rotazione di un angolo che è somma degli angoli delle due rotazioni, se questa somma è diversa da 2π, altrimenti produce una traslazione.

Si tenga però ben presente che, in generale, non è possibile invertire l'ordine nel prodotto delle due rotazioni: se si esegue una rotazione di centro C_1 e angolo α e successivamente una rotazione di centro C_2 e angolo β, si ottiene ancora una rotazione, di centro C_3 e angolo $\alpha + \beta$; se si inverte l'ordine delle rotazioni si ottiene una rotazione ancora di angolo $\alpha + \beta$, ma in generale di centro $C_4 \neq C_3$. Solo per le rotazioni attorno allo stesso centro è possibile invertire l'ordine nella composizione.

Esempio 12. La trasformazione

$$
f \colon \left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + 1 \\[2ex] y' & = & \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y \end{array} \right.
$$

è una isometria diretta in quanto

$$
\det(A) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1 .
$$

[2] Nelle applicazioni è importante determinare il punto unito, ma sconsigliamo dal memorizzare le formule relative: è molto meglio risolvere direttamente il sistema (41)

Si ha

$$\alpha = \arcsin\frac{4}{5} \simeq 0.93 \quad (\simeq 53.13°)\,.$$

Determiniamo il punto unito:

$$\begin{cases} x &= \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y + 1 \\[2ex] y &= \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y \end{cases},$$

sistema di facile risoluzione che porge $C_1 = (1/2\,,1)$. Si tratta dunque di una rotazione dell'angolo α indicato, con centro il punto C_1. La figura 11 ne mostra l'effetto, al solito, su un triangolo.

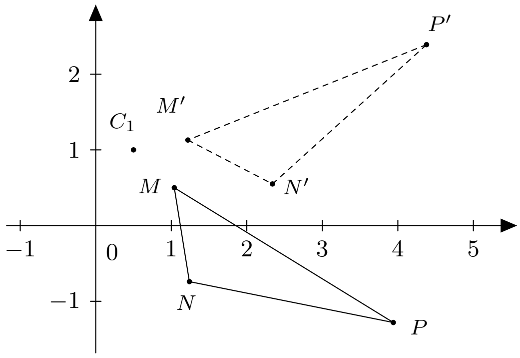

Figura 11 *Rotazione attorno ad un punto.*

Esempio 13. La trasformazione

$$g\colon \begin{cases} x' &= \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y \\[2ex] y' &= \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + 1 \end{cases}$$

è una isometria diretta in quanto

$$\det(A) = \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1\,.$$

Si ha

$$\alpha = \arcsin\frac{4}{5} \simeq 0.93 \quad (\simeq 53.13°)\,.$$

Determiniamo il punto unito:

$$\begin{cases} x &= \dfrac{3}{5}x - \dfrac{4}{5}y \\[2ex] y &= \dfrac{4}{5}x + \dfrac{3}{5}y + 1 \end{cases},$$

sistema di facile risoluzione che porge $C_2 = (-1, 1/2)$. Si tratta dunque di una rotazione dell'angolo α indicato, con centro il punto C_2.

Esempio 14. Consideriamo ora le composizioni $f \circ g$ e $g \circ f$, dove f e g sono le rotazioni degli esercizi 12 e 13 rispettivamente. Con facili calcoli si trova:

$$f \circ g\colon \begin{cases} x' &= -\dfrac{7}{25}x - \dfrac{24}{25}y + \dfrac{1}{5} \\[2ex] y' &= \dfrac{24}{25}x - \dfrac{7}{25}y + \dfrac{3}{5} \end{cases},$$

e

$$g \circ f : \begin{cases} x' &= -\dfrac{7}{25}x - \dfrac{24}{25}y + \dfrac{3}{5} \\ y' &= \dfrac{24}{25}x - \dfrac{7}{25}y + \dfrac{9}{5} \end{cases} .$$

Si può constatare che:

— $f \circ g \neq g \circ f$;
— l'angolo di rotazione del prodotto è 2α (le due rotazioni avevano lo stesso α);
— il centro di rotazione di $f \circ g$ è $C_3 = (-1/8\,,\,3/8)$;
— il centro di rotazione di $g \circ f$ è $C_4 = (-3/8\,,\,9/8)$.

7.3 Simmetrie assiali (o riflessioni) e glissoriflessioni

Consideriamo ora una isometria inversa.

$$\begin{cases} x' &= ax + by + p \\ y' &= bx - ay + q \end{cases} , \quad \text{con} \quad \det(A) = -a^2 + -b^2 = -1 \tag{45}$$

che si può scrivere

$$\begin{cases} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha + p \\ y' &= x\sin\alpha - y\cos\alpha + q \end{cases} , \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} , \tag{46}$$

Per quanto riguarda gli elementi uniti, per queste trasformazioni vale il seguente teorema.

Teorema 20. *Le trasformazioni del tipo (46) si dividono in due sole classi:*

1. *quelle che hanno una retta r di punti uniti e in questo caso ogni retta perpendicolare ad r è globalmente unita;*
2. *quelle che non hanno punti punti e in questo caso hanno una sola retta s globalmente unita.*

La retta r delle isometrie del primo tipo e la retta s delle isometrie del secondo tipo hanno coefficiente angolare $\operatorname{tg} \alpha/2$.

Per coloro che conoscono la teoria dei sistemi lineari proponiamo solo un inizio di dimostrazione di questo teorema. La ricerca dei punti uniti richiede la risoluzione del sistema

$$\begin{cases} x(1-\cos\alpha) - y\sin\alpha &= p \\ -x\sin\alpha + y(1+\cos\alpha) &= q \end{cases} .$$

e questo sistema ha matrice dei coefficienti con determinante nullo: per questo motivo il sistema può avere infinite soluzioni o nessuna soluzione e da qui seguono i due casi citati nel teorema.

In base al teorema 20 e ad un esame dettagliato di ulteriori proprietà delle isometrie inverse, che non proponiamo, si può concludere con le seguenti definizioni.

Definizione 21 (Simmetria assiale o riflessione)**.** *Una isometria inversa avente infiniti punti uniti è una* riflessione *o* simmetria assiale *rispetto alla retta r dei punti uniti, che ha coefficiente angolare* $\operatorname{tg}\alpha/2$. *La retta dei punti uniti si chiama* asse della simmetria. *Tutte le rette perpendicolari all'asse di simmetria sono globalmente unite.*

Definizione 22 (Glissoriflessione)**.** *Una isometria inversa non avente punti uniti è la composizione di una riflessione e una traslazione di un vettore parallelo all'asse della riflessione (in un ordine qualunque: in questo caso riflessione e traslazione di un vettore parallelo all'asse della riflessione commutano): la trasformazione si chiama una* glissoriflessione. *Esiste una sola retta globalmente unita, di coefficiente angolare* $\operatorname{tg}\alpha/2$, *che si può chiamare* asse della glissoriflessione*: questa retta viene fatta scorrere su se stessa dalla trasformazione.*

Esempio 15. La trasformazione

$$\begin{cases} x' &= y-1 \\ y' &= x+1 \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è un'isometria inversa con $\alpha = \pi/2$. Andiamo alla ricerca dei punti uniti, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x &= y-1 \\ y &= x+1 \end{cases}.$$

È immediato che esso ha per soluzioni tutti i punti della retta $r\colon x-y+1=0$. Si tratta dunque di una simmetria assiale avente per asse la retta r, che ha coefficiente angolare 1, ovvero proprio $\operatorname{tg} \alpha/2 = \operatorname{tg} \pi/4$. È altresì immediato che tutte le rette $y=-x+q$ sono globalmente unite.

Esempio 16. La trasformazione

$$\begin{cases} x' &= y \\ y' &= x+1 \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

è un'isometria inversa con $\alpha = \pi/2$. Andiamo alla ricerca dei punti uniti, risolvendo il sistema

$$\begin{cases} x &= y \\ y &= x+1 \end{cases},$$

sistema che, palesemente, non ha soluzioni. Andiamo allora alla ricerca delle rette globalmente unite $y'=mx'+q$. Sostituendo i valori di x' e y' in funzione di x e y si trova $x=m(y-1)+q$, ovvero $my=x+m-q$. Scartato il valore $m=0$, che si verifica subito non essere accettabile, si trova

$$y=\frac{1}{m}x+\frac{m-q}{m},$$

da cui

$$\frac{1}{m}=m \wedge \frac{m-q}{m}=q \quad \Rightarrow \quad m=1,\ q=\frac{1}{2}.$$

Si ha dunque la retta globalmente unita $y=x+1/2$ che è l'asse della glissoriflessione e ha coefficiente angolare proprio $1=\operatorname{tg}\alpha/2=\operatorname{tg}\pi/4$.

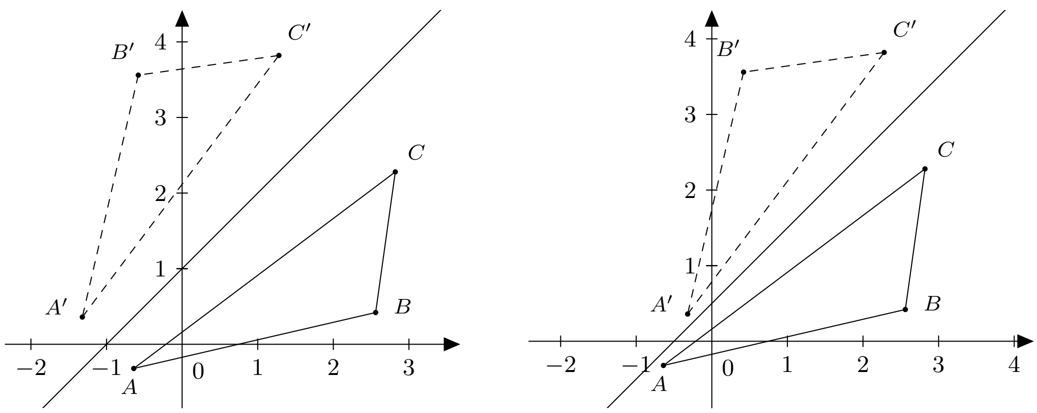

Figura 12 *La simmetria assiale e la glissoriflessione degli esempi 15 e 16.*

7.4 Simmetrie particolari

Alcuni casi particolari di simmetrie assiali sono importanti nelle applicazioni e meritano un cenno a parte.

Simmetria rispetto all'asse x

È una trasformazione del tipo (46), con $\alpha = 0$ e $\vec{\tau} = \vec{0}$. La trasformazione si riduce allora alla seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x \\ y' & = & -y \end{array} \right. \tag{47}$$

Simmetria rispetto alla retta $y = y_0$

È una trasformazione del tipo (46), con $\alpha = 0$ e $\vec{\tau}$ da determinare, tenendo conto che la retta dei punti uniti deve essere $y = y_0$. Si trova subito che deve essere

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2y_0 \end{pmatrix}$$

La trasformazione si riduce allora alla seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x \\ y' & = & -y + 2y_0 \end{array} \right. \tag{48}$$

Simmetria rispetto all'asse y

È una trasformazione del tipo (46), con $\alpha = \pi$ (si ricordi che l'asse di simmetria forma un angolo pari ad $\alpha/2$ con l'asse x) e $\vec{\tau} = \vec{0}$. La trasformazione si riduce allora alla seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x \\ y' & = & y \end{array} \right. \tag{49}$$

Simmetria rispetto alla retta $x = x_0$

È una trasformazione del tipo (46), con $\alpha = \pi$ e $\vec{\tau}$ da determinare tenendo conto che la retta dei punti uniti deve essere $x = x_0$. Si trova subito che deve essere:

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} 2x_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La trasformazione si riduce allora alla seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x + 2x_0 \\ y' & = & y \end{array} \right. \tag{50}$$

Simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$

È una trasformazione del tipo (46), con $\alpha = \pi/2$ (la bisettrice forma un angolo pari a $\pi/4$ con l'asse x) e $\vec{\tau} = \vec{0}$. La trasformazione si riduce allora alla seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & y \\ y' & = & x \end{array} \right. \tag{51}$$

Simmetria rispetto alla bisettrice $y = -x$

È una trasformazione del tipo (46), con $\alpha = 3\pi/2$ (la bisettrice forma un angolo pari a $3\pi/4$ con l'asse x) e $\vec{\tau} = \vec{0}$. La trasformazione si riduce allora alla seguente:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -y \\ y' & = & -x \end{array} \right. \tag{52}$$

Anche le simmetrie centrali, o mezzigiri, di cui abbiamo già parlato nella pagina 17, sono importanti nelle applicazioni e meritano una trattazione più dettagliata.

Simmetria rispetto all'origine

È una trasformazione del tipo (43) con $\vec{\tau}=\vec{0}$. Si ottiene dunque:

$$\begin{cases} x' &= -x \\ y' &= -y \end{cases} \tag{53}$$

Simmetria rispetto al punto (x_0, y_0)

È una trasformazione del tipo (43) con $\vec{\tau}$ da determinarsi, tenendo conto che il punto unito deve essere (x_0, y_0). Si ottiene facilmente:

$$\begin{cases} x' &= -x + 2x_0 \\ y' &= -y + 2y_0 \end{cases} \tag{54}$$

7.5 Osservazioni conclusive sulle isometrie

Gli esempi considerati di isometria esauriscono tutti i casi possibili. Per comodità riportiamo qui uno schema riassuntivo.

Sia f una isometria diversa dall'identità. Allora:

1. se è diretta e non ha punti uniti è una traslazione;
2. se è diretta e ha un solo punto unito è una rotazione attorno al punto unito;
3. se è inversa e ha punti uniti (che sono necessariamente infiniti) è una simmetria assiale con asse di simmetria la retta dei punti uniti;
4. se è inversa e non ha punti uniti è una glissoriflessione e ha una retta globalmente unita che è l'asse della glissoriflessione.

Per le isometrie vale anche il seguente, importante, teorema.

Teorema 23. *Ogni isometria del piano è ottenibile come composizione di n simmetrie assiali (o riflessioni), con $n \leq 3$. In particolare:*

— *se $n = 1$ si ha (ovviamente) una simmetria assiale;*
— *se $n = 2$ e i due assi r ed s delle simmetrie f_r ed f_s sono paralleli, allora la composizione $f_r \circ f_s$ è una traslazione di vettore $\vec{\tau}$ perpendicolare ai due assi e modulo doppio della distanza tra r ed s; il verso di $\vec{\tau}$ è tale che, se si sceglie il suo primo estremo su s (asse della prima simmetria), il secondo estremo appartiene al semipiano individuato da r (asse della seconda simmetria) non contenente s;*
— *se $n = 2$ e i due assi r ed s delle simmetrie sono incidenti in un punto C, allora la composizione delle due simmetrie è una rotazione di centro C e di angolo α doppio dell'angolo, orientato, individuato da s ed r;*
— *se $n = 3$ e l'isometria non ha punti fissi, allora è una glissoriflessione.*

8 Ancora sulle similitudini

Come utile approfondimento ed esercizio, enunciamo alcuni ulteriori risultati generali sulle similitudini, che non hanno trovato posto nel paragrafo relativo, in quanto richiedono i concetti relativi alle omotetie e alle isometrie.

Teorema 24. *Ogni similitudine f è composizione di una omotetia (di centro qualunque) g e di una isometria h. La scomposizione si può scrivere sia come $f = h \circ g$, sia come $f = g \circ h$, ma l'omotetia e l'isometria che compaiono nelle due scomposizioni saranno, in generale, diverse.*

La dimostrazione di questo teorema è elementare e la proponiamo come utile esercizio. Sia k il rapporto di similitudine. Se $k = 1$ non c'è nulla da dimostrare: la similitudine è essa stessa una isometria, e dunque la composizione di un'isometria con la trasformazione identica (che è un'omotetia). Se $k \neq 1$, consideriamo una omotetia g di centro arbitrario e rapporto $1/k$. La trasformazione composta $h_1 = f \circ g$ è ancora una similitudine (perché composizione di similitudini, che formano un sottogruppo del gruppo delle affinità) ed ha rapporto $k \cdot 1/k = 1$, dunque è un'isometria. Moltiplicando a destra per g^{-1}, che è ancora un'omotetia, si trova:

$$f = h_1 \circ g^{-1}\,. \tag{55}$$

Anche la trasformazione $h_2 = g \circ f$ è un'isometria e moltiplicando questa volta a sinistra per g^{-1} si ottiene:

$$f = g^{-1} \circ h_2\,. \tag{56}$$

Si è dunque ottenuta la decomposizione di f come richiesto. Si tenga presente che $h_2 \neq h_1$, in generale, in quanto il prodotto di affinità non è commutativo.

Si noti anche che, se f è diretta, allora anche h_1 lo e h_2 lo sono (in quanto g è diretta), se f è inversa, allora anche h_1 lo e h_2 lo sono.

Teorema 25. *Ogni similitudine che non sia un'isometria ha un unico punto unito.*

La dimostrazione di questo teorema, per chi conosce la teoria dei sistemi lineari, è particolarmente significativa e la proponiamo come utile esercizio. Sia

$$\begin{cases} x' &= k(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + p \\ y' &= k(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + q \end{cases},$$

una similitudine diretta e cerchiamo i punti uniti. Si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x &= k(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + p \\ y &= k(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + q \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{cases} (1-k\cos\alpha)x + (k\sin\alpha)y &= p \\ (-k\sin\alpha)x + (1-k\cos\alpha)y &= q \end{cases}.$$

Il determinante della matrice incompleta A (matrice dei coefficienti) è

$$\det(A) = k^2 + 1 - 2k\cos\alpha.$$

Si ha dunque

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \frac{k^2+1}{2k} = \cos\alpha\,, \quad \text{ove} \quad k > 0\,.$$

Non è difficile provare che

$$\frac{k^2+1}{2k} > 1\,, \quad \text{se} \quad (0 <)\, k \neq 1\,.$$

Infatti

$$\frac{k^2+1}{2k} > 1 \Leftrightarrow k^2 + 1 > 2k \Leftrightarrow (k-1)^2\; 0\,,$$

che è banalmente vera se $k \neq 1$.

Un ragionamento simile si può fare per le similitudini inverse.

Come conseguenza di questi due teoremi e delle proprietà delle omotetie e isometrie, si può concludere con i seguenti risultati generali che evidenziano il significato delle similitudini.

Teorema 26. *Ogni similitudine diretta che non sia un'isometria si può scomporre in infiniti modi nel prodotto tra una rotazione e un'omotetia con rapporto di omotetia uguale al rapporto di similitudine. È sempre possibile scegliere come centro sia dell'omotetia che della rotazione l'unico punto unito della similitudine; in questo caso l'ordine in cui si compongono le due trasformazioni non conta. Si esprime brevemente questo fatto dicendo che le similitudini dirette che non sono isometrie sono* rotoomotetie.

Teorema 27. *Ogni similitudine inversa che non sia un'isometria si può scomporre in infiniti modi nel prodotto di una simmetria assiale rispetto a una retta e di un'omotetia, di rapporto uguale al rapporto di similitudine. È sempre possibile scegliere come centro dell'omotetia l'unico punto unito, C, della similitudine e in questo caso l'asse r della simmetria assiale è la retta di coefficiente angolare* $\operatorname{tg} \alpha/2$ *passante per il punto unito. Da qui si deduce che una similitudine inversa ha due rette globalmente unite: la retta r e la perpendicolare ad r per C.*

Esempio 17. Se riprendiamo in esame la similitudine dell'esempio 8, troviamo che essa ha il punto $M = (0, 1/2)$ come punto unito. Essa ha inoltre $k = \sqrt{5}$ come rapporto di similitudine. Le equazioni (27) della similitudine possono essere riscritte come segue:

$$\begin{cases} x' &= x - 2y + 1 \\ y' &= 2x + y \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x' &= \sqrt{5}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}x - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y\right) + 1 \\ y' &= \sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}x + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y\right) \end{cases},$$

ovvero, posto

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right),$$

come

$$\begin{cases} x' &= \sqrt{5}\,(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + 1 \\ y' &= \sqrt{5}\,(x\sin\alpha + y\cos\alpha) \end{cases}.$$

Ebbene la similitudine data può essere scomposta nel prodotto tra un'omotetia di centro M e rapporto $\sqrt{5}$ e una rotazione, attorno a M, di un angolo α, in uno dei due ordini possibili.

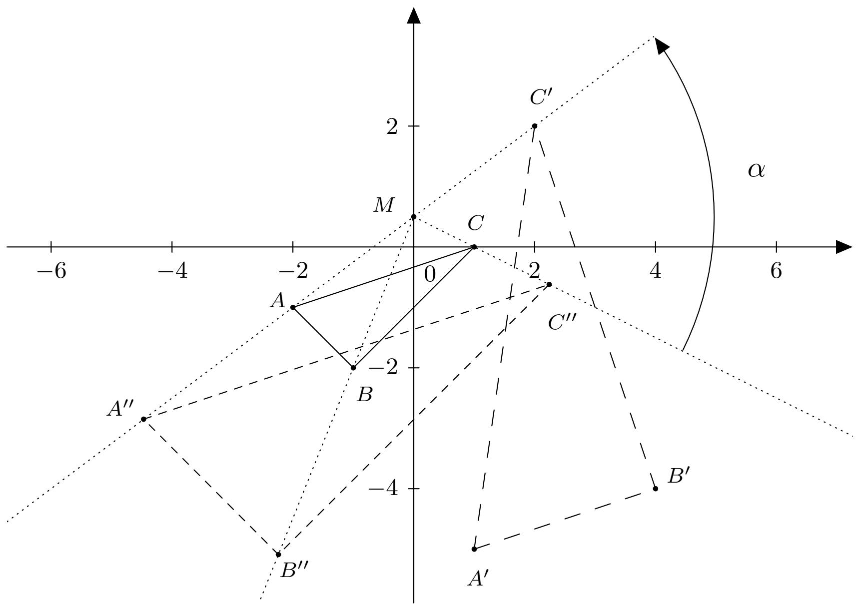

Figura 13 *Similitudine ottenuta applicando prima una omotetia e poi una rotazione di stesso centro.*

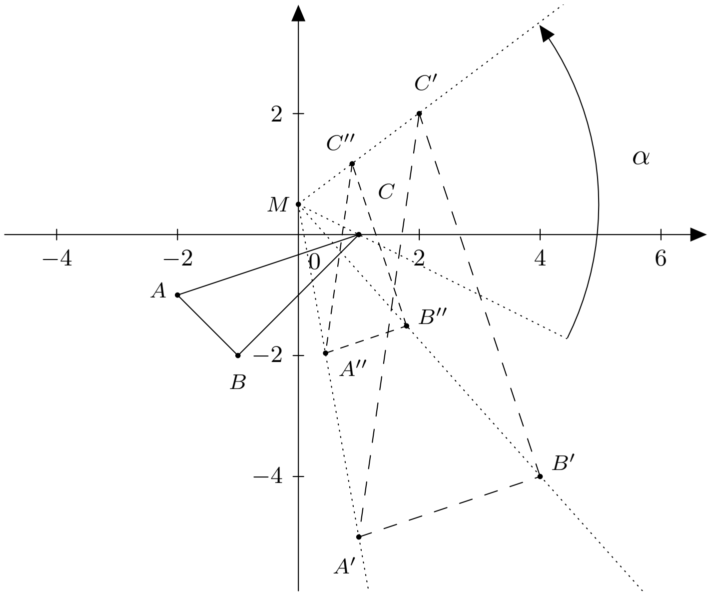

Figura 14 *Similitudine ottenuta applicando prima una rotazione e poi una omotetia di stesso centro.*

Esempio 18. Riprendiamo in esame nuovamente la similitudine dell'esempio 8, che sappiamo avere $k = \sqrt{5}$ come rapporto di similitudine. Indichiamo con f questa similitudine:

$$f\colon \begin{cases} x' &= x - 2y + 1 \\ y' &= 2x + y \end{cases} .$$

Vogliamo provare che essa può essere scritta come prodotto di una rotazione e un'omotetia, oppure di un'omotetia e una rotazione, senza usare come centro il punto unito della similitudine. In questo caso non varrà la proprietà commutativa nell'applicazione delle due trasformazioni, come invece visto nell'esempio 17.

Per questo consideriamo l'omotetia di rapporto di omotetia $1/\sqrt{5}$ e centro, per esempio, l'origine, omotetia che indichiamo con g:

$$g\colon \begin{cases} x' &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}x \\ y' &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases} .$$

L'omotetia inversa è

$$g^{-1}\colon \begin{cases} x' &= \sqrt{5}x \\ y' &= \sqrt{5}y \end{cases} .$$

È chiaro che sia $f \circ g$ che $g \circ f$ sono delle isometrie, in quanto in una composizione di similitudini il rapporto di similitudine si ottiene moltiplicando i due rapporti di similitudine[(3)], e in questo caso si ottiene, per costruzione

$$1 = \sqrt{5} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5}\,.$$

Poniamo

$$h_1 = f \circ g\,, \quad h_2 = g \circ f.$$

[3]Basta ricordare, vedi il paragrafo 3, che la matrice della composta di due affinità è il prodotto delle matrici delle due componenti e che il determinante del prodotto è il prodotto dei determinanti.

Se si moltiplica la prima uguaglianza a destra per g^{-1} e la seconda a sinistra sempre per g^{-1}, si ottiene

$$f = h_1 \circ g^{-1}\,, \quad f = g^{-1} \circ h_2\,,$$

ottenendo così la decomposizione di f, in due modi diversi, come prodotto di una omotetia e una isometria, o una isometria e una omotetia.

Facendo i conti si trova, facilmente,

$$h_1 = f \circ g = \begin{cases} x' &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}x - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y + 1 \\ y' &= \dfrac{2}{\sqrt{5}}x + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases}.$$

Si tratta di una rotazione di centro M_1 e angolo α dati da

$$M_1 = \left(\frac{1}{2}\,, \frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)\,, \quad \alpha = \arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Questa decomposizione di f in $h_1 \circ g^{-1}$ è illustrata nella figura 15.

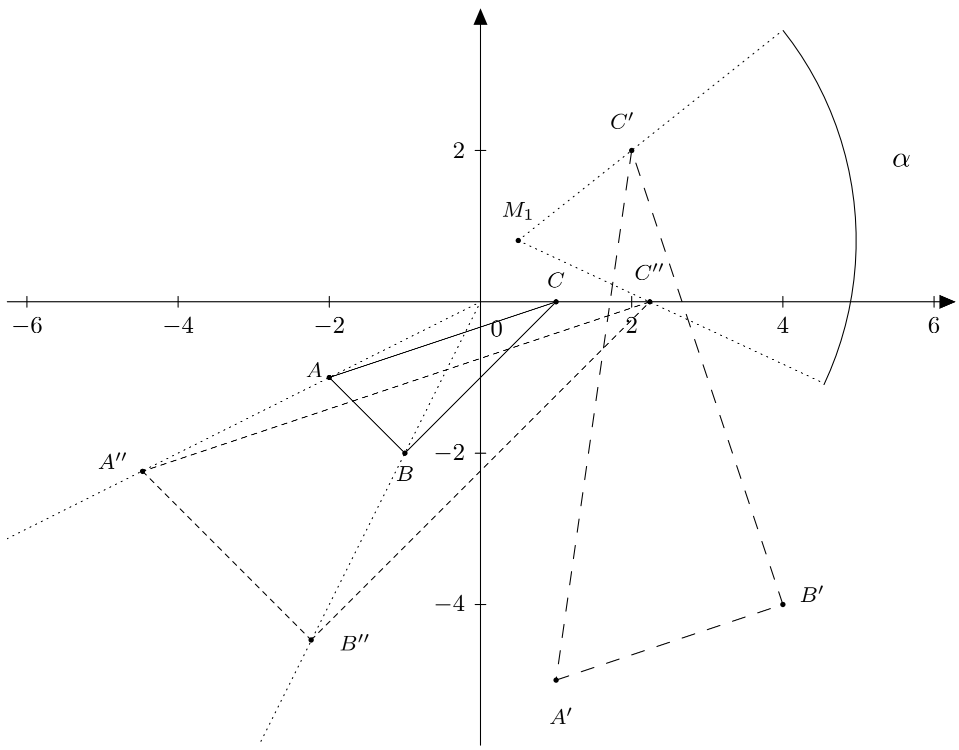

Figura 15 *Decomposizione di una similitudine in omotetia e rotazione con centri diversi.*

Analogamente si trova

$$h_2 = g \circ f = \begin{cases} x' &= \dfrac{1}{\sqrt{5}}x - \dfrac{2}{\sqrt{5}}y + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y' &= \dfrac{2}{\sqrt{5}}x + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y \end{cases}.$$

Questa isometria, h_2, è una rotazione di centro M_2 e angolo α dati da

$$M_2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{10} \, , \, \frac{5+\sqrt{5}}{20} \right) \, , \quad \alpha = \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} \, .$$

La decomposizione di f in $g^{-1} \circ h_2$ è rappresentata nella figura 16.

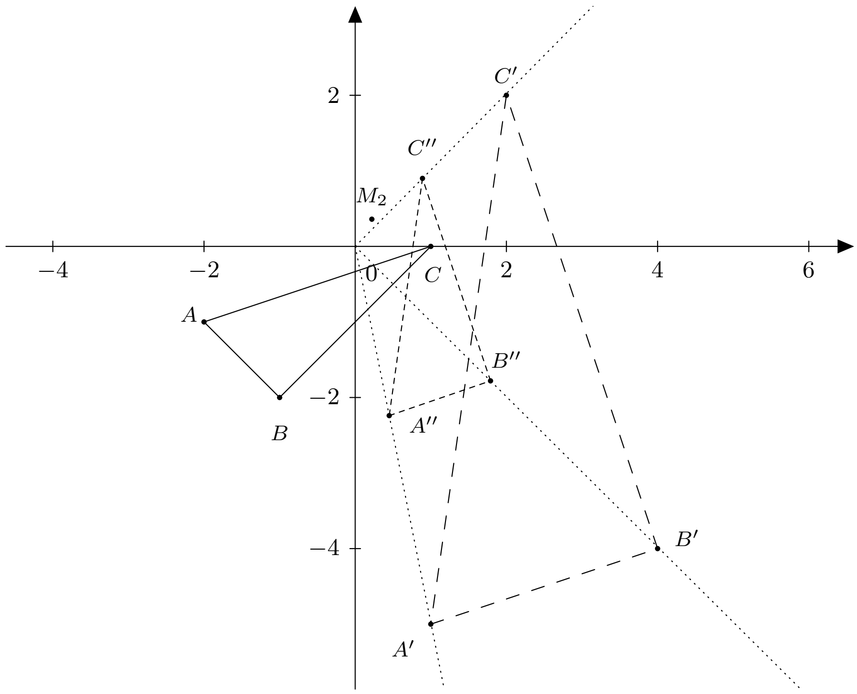

Figura 16 *Decomposizione di una similitudine in rotazione e omotetia con centri diversi.*

Esempio 19. Siano date la simmetria assiale

$$f\colon \begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} ,$$

e l'omotetia

$$g\colon \begin{cases} x' = 2x - 2 \\ y' = 2y \end{cases} ,$$

di centro $M = (1, 0)$ e rapporto 2. Se componiamo le due trasformazioni otterremo una similitudine inversa. Si ha:

$$s_1 = f \circ g\colon \begin{cases} x' = 2y \\ y' = 2x - 2 \end{cases} ,$$

e

$$s_2 = g \circ f\colon \begin{cases} x' = 2y - 2 \\ y' = 2x \end{cases} .$$

Calcoli ormai standard provano quanto segue.

La similitudine $s_1 = f \circ g$ ha il punto $M_1 = (4/3 \, , \, 2/3)$ come punto unito; essa ha inoltre come rette unite

$$r\colon y = x - \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad s\colon y = -x + 2 \, ,$$

che sono tra di loro perpendicolari e si incontrano proprio nel punto unito. Essendo $\alpha = \pi/2$, la retta r ha coefficiente angolare proprio $\mathrm{tg}\,\alpha/2 = \pi/4 = 1$. Dunque s_1 si può decomporre nel prodotto (in un ordine qualunque) tra una simmetria assiale, σ_1, rispetto alla retta r e un'omotetia, ω_1, di centro M_1 e coefficiente 2.

La similitudine $s_2 = g \circ f$ ha il punto $M_2 = (2/3\,,\, 4/3)$ come punto unito; essa ha inoltre come rette unite

$$t\colon y = x + \frac{2}{3} \quad \text{e} \quad u\colon y = -x + 2\,,$$

che sono tra di loro perpendicolari e si incontrano proprio nel punto unito. Essendo $\alpha = \pi/2$, la retta t ha coefficiente angolare proprio $\mathrm{tg}\,\alpha/2 = \pi/4 = 1$. Dunque s_2 si può decomporre nel prodotto (in un ordine qualunque) tra una simmetria assiale, σ_2, rispetto alla retta t e un'omotetia, ω_2, di centro M_2 e coefficiente 2.

L'esempio mostra che s_1, per esempio, si può scrivere come prodotto tra una simmetria assiale e una omotetia in due modi diversi:

$$s_1 = f \circ g \quad \vee \quad s_1 = \sigma_1 \circ \omega_1 \; (= \omega_1 \circ \sigma_1)\,.$$

La seconda decomposizione è particolarmente significativa, in quanto la simmetria σ_1 e l'omotetia ω_1 commutano, e inoltre l'omotetia trasforma l'asse della simmetria (che era una retta di punti uniti) in una retta globalmente unita, senza spostarla.

9 Schema logico per trattare le affinità

A conclusione di questa breve introduzione sulle affinità proponiamo uno schema logico che propone un procedimento standard per esaminare le proprietà di una affinità. Lo schema è costruito utilizzando una specie di chiave politomica di identificazione, adattata a questo speciale problema.

Sia data una trasformazione geometrica affine:

$$\begin{cases} x' &= ax + by + p \\ y' &= bx - ay + q \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Poniamo

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e quindi} \quad \det(A) = ad - bc\,.$$

Si può procedere con i passi indicati nella chiave seguente.

1a Se $\det(A) = 0$ la trasformazione *non è un'affinità.*
1b Se $\det(A) \neq 0$ vai al punto 2.

- 2a Se $A \neq \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \wedge A \neq \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ si tratta di una *generica affinità.*
- 2b Se $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \vee A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ vai al punto 3.
  - 3a Se $\det(A) = 1$ vai al punto 4.
    - 4a Se non ha punti uniti è una *traslazione.*
    - 4b Se ha un solo punto unito è una *rotazione.*
  - 3b Se $\det(A) = -1$ vai al punto 5.
    - 5a Se ha infiniti punti uniti è una *simmetria assiale.*

$5b$ Se non ha punti uniti è una *glissoriflessione*.

$3c$ Se $\det(A) > 0$, ma $\neq 1$, vai al punto 6.

$6a$ Se $b = 0$ è una *omotetia*.

$6b$ Se $b \neq 0$ è una similitudine *prodotto tra una rotazione e una omotetia*.

$3d$ Se $\det(A) < 0$, ma $\neq -1$, è una similitudine inversa, *prodotto tra una simmetria assiale e una omotetia*.

9.1 Qualche indicazione tecnica

Nel caso $2a$ è utile determinare il rapporto di affinità che fornisce il rapporto tra le aree di regioni corrispondenti (l'area della regione trasformata fratto l'area della regione originaria).

Nel caso $4a$ Il vettore

$$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$$

è il vettore traslazione. Ogni retta ad esso parallela è globalmente unita.

Nel caso $4b$ il punto unito è il centro della rotazione. Per trovare l'angolo conviene scrivere l'affinità nella forma

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x\cos\alpha - y\sin\alpha + p \\ y' & = & x\sin\alpha + y\cos\alpha + q \end{array} \right. . \tag{57}$$

Non esistono rette globalmente unite.

Nel caso $5a$ la retta dei punti uniti è l'asse della simmetria assiale. Scritta l'equazione nella forma

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x\cos\alpha + y\sin\alpha + p \\ y' & = & x\sin\alpha - y\cos\alpha + q \end{array} \right. , \tag{58}$$

l'asse della simmetria assiale ha coefficiente angolare $\operatorname{tg} \alpha/2$. Tutte le rette perpendicolari all'asse di simmetria sono globalmente unite.

Nel caso $5b$ esiste una retta globalmente unita, che è l'asse della glissoriflessione. La trasformazione è composizione di una simmetria rispetto a quest'asse e una traslazione parallela all'asse.

Nel caso $6a$ l'unico punto unito della trasformazione è il centro della omotetia. Ogni retta per il centro è globalmente unita.

Nel caso $6b$ la trasformazione è una similitudine diretta che si può ottenere come prodotto tra un'omotetia di rapporto uguale al rapporto di similitudine e una rotazione, aventi entrambe centro nell'unico punto unito della trasformazione. Per trovare l'angolo della rotazione conviene scrivere la trasformazione nella forma

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & k(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + p \\ y' & = & k(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + q \end{array} \right. . \tag{59}$$

Nel caso $3d$ la trasformazione è una similitudine inversa che si può ottenere come prodotto tra una simmetria assiale di asse r e un'omotetia di centro $C \in r$, che è l'unico punto unito della trasformazione. Una trasformazione di questo tipo ha due rette globalmente unite, tra di loro perpendicolari, di cui una è l'asse della simmetria assiale; queste rette si incontrano nel punto unito. Il coefficiente angolare della retta r è dato da $\operatorname{tg} \alpha/2$, dove α si trova scrivendo la trasformazione nel modo

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & k(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + p \\ y' & = & k(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + q \end{array} \right. . \tag{60}$$

10 Isometrie e omotetie: dalla definizione geometrica alle equazioni

In molti casi è abbastanza agevole ricavare le equazioni di una affinità, a partire dalla sua definizione geometrica. Ci occuperemo qui del caso particolare delle isometrie e delle omotetie, perché molto importanti nelle applicazioni e perché i procedimenti relativi sono particolarmente significativi.

Ognuno dei casi trattati si concluderà con una formula specifica: invitiamo il lettore a *non* memorizzare la formula, quanto piuttosto il procedimento applicato (che è sempre elementare) e che può essere replicato senza difficoltà nei casi concreti.

10.1 Traslazioni

Una traslazione è individuata da un vettore

(61) $$\vec{\tau} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} :$$

il punto P' è sempre ottenuto dal punto P per traslazione del vettore $\vec{\tau}$.

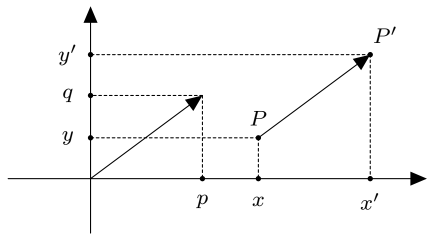

Figura 17 *Traslazione di vettore* $\vec{\tau}$

La figura 17 rende evidente la validità delle formule seguenti per la traslazione di vettore $\vec{\tau}$:

(62) $$\begin{cases} x' = x + p \\ y' = y + q \end{cases}$$

10.2 Rotazioni

Sia $C = (x_0, y_0)$ il centro della rotazione e α l'angolo di rotazione. Si esamini la figura 18.

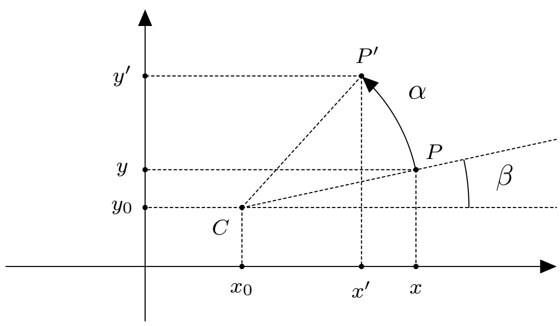

Figura 18 *Rotazione di centro* $C = (x_0, y_0)$ *e angolo* α.

Si ottiene facilmente, posto $r = \overline{CP} = \overline{CP'}$:

$$\begin{cases} x - x_0 &= r\cos\beta \\ y - y_0 &= r\sin\beta \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} x' - x_0 &= r\cos(\alpha+\beta) = r\cos\alpha\cos\beta - r\sin\alpha\sin\beta = (x-x_0)\cos\alpha - (y-y_0)\sin\alpha \\ y' - y_0 &= r\sin(\alpha+\beta) = r\sin\alpha\cos\beta + r\cos\alpha\sin\beta = (x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha \end{cases} .$$

Da qui si ottengono le formule per la rotazione:

$$\begin{cases} x' &= x_0 + (x-x_0)\cos\alpha - (y-y_0)\sin\alpha \\ y' &= y_0 + (x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha \end{cases} . \tag{63}$$

10.3 Simmetrie assiali

Le simmetrie rispetto a rette parallele agli assi e rispetto alle bisettrici $y = x$ e $y = -x$ sono elementari.

— La simmetria rispetto all'asse x lascia invariata la x e cambia la y in $-y$: $x' = x$, $y' = -y$.
— La simmetria rispetto all'asse y lascia invariata la y e cambia la x in $-x$: $x' = -x$, $y' = y$.
— La simmetria rispetto alla retta orizzontale $y = y_0$ si trova tenendo conto che il punto P e il punto P' hanno la stessa ascissa e che l'ordinata del punto medio tra P e P' deve essere y_0: $x' = x$, ${(y+y')}/{2} = y_0$, da cui $x' = x$, $y' = -y + 2y_0$.
— La simmetria rispetto alla retta verticale $x = x_0$ si trova tenendo conto che il punto P e il punto P' hanno la stessa ordinata e che l'ascissa del punto medio tra P e P' deve essere x_0: $y' = y$, ${(x+x')}/{2} = x_0$, da cui $x' = -x + 2x_0$, $y' = y$.
— La simmetria rispetto alla bisettrice $y = x$ scambia la x con la y: $x' = y$, $y' = x$.
— La simmetria rispetto alla bisettrice $y = -x$ scambia la x con la y e inverte anche i segni: $x' = -y$, $y' = -x$.

Per quanto riguarda la simmetria rispetto a una retta $r\colon y = mx + q$, non orizzontale né verticale, si ricava tenendo conto che il punto medio tra P e il trasformato P' deve stare sulla retta r e che inoltre il coefficiente angolare della retta per P e P' deve essere ${1}/{m}$ (r e PP' sono ortogonali).

$$\frac{y'+y}{2} = m\frac{x'+x}{2} + q \quad \wedge \quad \frac{y'-y}{x'-x} = \frac{1}{m} .$$

Svolgendo i calcoli si trova:

$$\begin{cases} x' &= \dfrac{1}{1+m^2}\Big((1-m^2)x + 2my - 2mq\Big) \\[2ex] y' &= \dfrac{1}{1+m^2}\Big(2mx + (1-m^2)y + 2q\Big) \end{cases} . \tag{64}$$

10.4 Omotetie

Sia $C = (x_0, y_0)$ il centro dell'omotetia, e k il rapporto di omotetia. Basterà tenere conto che il vettore $\overrightarrow{CP'}$, che ha componenti $(x' - x_0, y' - y_0)$ deve essere multiplo, secondo il fattore k (positivo o negativo) del vettore $\overrightarrow{CP}$, che ha componenti $(x - x_0, y - y_0)$. Si ottiene:

$$\begin{cases} x' &= x_0 + k(x - x_0) \\ y' &= y_0 + k(y - y_0) \end{cases} . \tag{65}$$

11 Qualche esercizio

Esercizio 1. *Si provi esplicitamente che le affinità conservano il punto medio dei segmenti, nel senso che se M è il punto medio di AB, M' è il punto medio di $A'B'$, dove M', A', B' sono i trasformati di A, B, C.*

Risoluzione. Sia

$$\begin{cases} x' &= ax + by + p \\ y' &= cx + dy + q \end{cases}$$

un'affinità e $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ due punti. Siano inoltre $A' = (x'_{A'}, y'_{A'})$, $B = (x'_{B'}, y'_{B'})$ i loro trasformati. Si ha:

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right) \quad \text{e} \quad M' = \left(\frac{x'_{A'} + x'_{B'}}{2}, \frac{y'_{A'} + y'_{B'}}{2}\right).$$

Utilizzando le formule della trasformazione si ottiene

$$\frac{x'_{A'} + x'_{B'}}{2} = \frac{ax_A + by_A + p + ax_B + by_B + p}{2} = a\frac{x_A + x_B}{2} + b\frac{y_A + y_B}{2} + p = ax_M + b_M + p\,,$$

da cui si conclude che l'ascissa di M' è l'immagine dell'ascissa di M. Analogo calcolo per l'ordinata. □

Esercizio 2. *Si provi, seguendo la strategia dell'esercizio 1, che le affinità conservano anche il baricentro dei triangoli, nel senso che se G è il baricentro di ABC, G' è il baricentro di $A'B'C'$, con le stesse notazioni dell'esercizio 1.*

Esercizio 3. *Determinare gli elementi uniti della trasformazione*

$$\begin{cases} x' &= 2x \\ y' &= x + y \end{cases}.$$

Risoluzione. Per i punti uniti si deve risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x &= 2x \\ y &= x + y \end{cases},$$

che ha come soluzioni tutti i punti con $x = 0$, ovvero l'asse y. Cerchiamo ora le rette unite. Per quelle verticali, $x' = h$[4], si deve avere $2x = h$, ovvero $x = h/2$; da qui si deduce $h = h/2$, ovvero $h = 0$: l'unica retta globalmente unita è l'asse y, che avevamo già trovato come retta puntualmente unita. Esaminiamo le rette non verticali, $y' = mx' + q$. Sostituendo si trova $x + y = m(2x) + q$, ovvero $y = (2m - 1)x + q$. Si trova $m = 1$ e q arbitrario. Sono globalmente unite le rette $y = x + q$. □

Esercizio 4. *Determinare l'omotetia che muta la parabola $y = x^2$ nella parabola $y = x^2/2 + x + 1/2$*

Risoluzione. Si ha

$$\begin{cases} x' &= ax + p \\ y' &= ay + q \end{cases}.$$

Come al solito, anziché cercare l'inversa della omotetia, partiamo dall'equazione trasformata e otteniamo:

$$ay + q = \frac{(ax + p)^2}{2} + ax + p + \frac{1}{2}, \quad \text{ovvero} \quad y = \frac{a}{2}x^2 + (p + 1)x + \frac{p^2}{2a} + \frac{p}{a} + \frac{1}{2a} - \frac{q}{a}.$$

[4] Per evitare di dover trovare l'affinità inversa, si può partire dalle rette trasformate, anziché dalle rette originarie, come abbiamo già osservato.

Si deve dunque avere

$$\frac{a}{2}=1 \quad \wedge \quad p+1=0 \quad \wedge \quad \frac{p^2}{2a}+\frac{p}{a}+\frac{1}{2a}-\frac{q}{a}=0\,,$$

da cui si ricava $a=2$, $p=-1$, $q=0$. □

Esercizio 5. *Si determini la trasformazione del tipo*

$$\begin{cases} x' &= ax+by \\ y' &= cx+dy \end{cases}$$

che muta i punti $A(1,1)$ e $B(1,0)$ rispettivamente nei punti $A'(0,2)$ e $B'(1,0)$. Si determinino le caratteristiche della trasformazione e i punti uniti.

Risoluzione. Si deve avere

$$\begin{cases} 0 &= a+b \\ 2 &= c+d \\ 1 &= a \\ 0 &= c \end{cases}, \quad \text{ovvero} \quad a=1,\, b=-1,\, c=0,\, d=2\ :$$

$$\begin{cases} x' &= x-y \\ y' &= 2y \end{cases}$$

Per i punti uniti si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} x &= x-y \\ y &= 2y \end{cases}$$

che ha come soluzioni i punti con $y=0$ e x qualunque, ovvero i punti dell'asse x, che risulta puntualmente unita.

Cerchiamo ora le rette unite; partendo da $y'=mx'+q$ e sostituendo si trova $2y=m(x-y)+q$ ovvero $y(m+2)=mx+q$. Si trova che deve essere

$$\frac{m}{m+2}=m \quad \wedge \quad \frac{q}{m+2}=q$$

che ha come soluzioni $m=0 \wedge q=0$ e $m=-1 \wedge q$ qualunque. Dunque sono unite la retta $y=0$ (che è anche puntualmente unita) e le rette del fascio $y=-x+q$. Si verifica anche facilmente che non esistono rette unite verticali. □

Esercizio 6 (Interessante, ma impegnativo)**.** *Determinare la trasformazione lineare (ovvero con $\vec{r}=\vec{0}$) che trasforma la circonferenza $x^2+y^2=1$ nell'ellisse $4x^2+25y^2=100$.*

Risoluzione. Sia

$$\begin{cases} x' &= ax+by \\ y' &= cx+dy \end{cases}$$

l'affinità. Potremmo cercare l'inversa dell'affinità e sostituire in $x^2+y^2=1$ al posto di x e y le loro espressioni in funzione di x' e y'. Possiamo però anche operare sull'equazione dell'ellisse, che scriviamo nella forma $4x'^2+25y'^2=100$. Si ottiene

$$4(ax+by)^2+25(cx+dy)^2=100\,, \quad \text{ovvero} \quad (4a^2+25c^2)x^2+(4b^2+25d^2)y^2+(8ab+50cd)xy=100\,.$$

Si può dunque concludere che deve essere

$$\frac{4a^2+25c^2}{100}=1 \wedge \frac{4b^2+25d^2}{100} \wedge 8ab+50cd=0\,,$$

ovvero

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{25}+\dfrac{c^2}{4} & = & 1 \\ \dfrac{b^2}{25}+\dfrac{d^2}{4} & = & 1 \\ \dfrac{ab}{25}+\dfrac{cd}{4} & = & 0 \end{cases} .$$

La prima e la seconda equazione implicano che devono esistere β e γ tali che

$$\cos\beta = \frac{a}{5} \wedge \sin\beta = \frac{c}{2} \quad \Rightarrow \quad a = 5\cos\beta \wedge c = 2\sin\beta\,,$$

e

$$\cos\gamma = \frac{b}{5} \wedge \sin\gamma = \frac{d}{2} \quad \Rightarrow \quad b = 5\cos\gamma \wedge d = 2\sin\gamma\,.$$

Sostituendo nella terza si trova

$$\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(\beta-\gamma) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = \gamma + \frac{\pi}{2} + k\pi\,.$$

Per $k = 0$ si ottiene:

$$\begin{cases} x' & = & -5x\sin\gamma + 5y\cos\gamma \\ y' & = & 2x\cos\gamma + 2y\sin\gamma \end{cases} .$$

Per $k = 1$ si ottiene:

$$\begin{cases} x' & = & -5x\sin\gamma + 5y\cos\gamma \\ y' & = & -2x\cos\gamma + 2y\sin\gamma \end{cases} .$$

Non sarebbe difficile provare che queste trasformazioni sono la composizione di una rotazione di un angolo qualunque γ o di una riflessione attorno a una retta qualunque per l'origine, con una trasformazione che dilati le x di 5 unità e le y di due unità. La cosa è geometricamente evidente. □