Qualche idea sulle serie numeriche

Luciano Battaia[(*)]

19 gennaio 2010

In questo articolo propongo alcune idee sulle serie numeriche, solo con lo scopo di fissare le nozioni di base. Non sono previste né dimostrazioni, nè una trattazione sistematica delle serie, cose che si possono trovare in tutti i testi di analisi e anche in altre parti di http://www.batmath.it.

1 Definizioni e nomenclatura

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di numeri reali[(1)]. Nel seguito avremo bisogno di considerare anche successioni definite su un sottoinsieme di $\mathbb{N}$. In genere scriveremo semplicemente (a_n): il contesto renderà chiaro qual è il sottoinsieme di $\mathbb{N}$ in cui la successione è definita. A partire da (a_n) costruiamo una nuova successione (s_n), detta successione associata alla (a_n), nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
&s_0 = a_0\\
&s_1 = a_0 + a_1 = s_0 + a_1 = \sum_{i=0}^{1} a_i\\
&s_2 = a_0 + a_1 + a_2 = s_1 + a_2 = \sum_{i=0}^{2} a_i\\
&\quad \dots\\
&s_n = a_0 + a_1 + \dots + a_n = s_{n-1} + a_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\\
&\quad \dots
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Tra le varie definizioni possibili di serie numerica, ci pare adeguata la seguente.

Definizione 1. *Si chiama* serie numerica *una coppia di successioni* $((a_n), (s_n))$ *collegate dalle formule* (1)*, cioè tali che*

$$
s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\,. \tag{2}
$$

Si usano le seguenti definizioni.

— La successione (a_n) si chiama successione del *termine generale* della serie.

(*) http://www.batmath.it

(1) Il simbolo $\mathbb{N}$ denota l'insieme dei numeri naturali, compreso lo zero: $\mathbb{N} = \{0,\, 1,\, \dots,\, n,\, \dots\}$.

— La successione (s_n) si chiama successione delle *ridotte* o delle *somme parziali* della serie.
— Se il

$$\lim_{n\to+\infty} s_n \tag{3}$$

esiste finito ed uguale a l si dice che *la serie converge*; l si chiama *somma della serie* e si scrive

$$l = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\,. \tag{4}$$

— Se il limite (3) esiste, ma vale $+\infty$ o $-\infty$, si dice che la serie è*divergente*, rispettivamente *positivamente divergente* o *negativamente divergente* e si scrive

$$\sum_{i=0}^{+\infty} a_i = +\infty \quad \text{oppure} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_i = -\infty \tag{5}$$

— Se il limite (3) non esiste, oppure è ∞, non $+\infty$, né $-\infty$, si dice che la serie è *indeterminata*.
Normalmente una serie si indica con uno dei simboli

$$a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots \quad \text{oppure} \quad \sum_{i=0}^{+\infty} a_i\,, \tag{6}$$

Si tenga comunque presente che entrambi i simboli (6) denotano anche la somma della serie, quando essa è convergente o divergente. Purtroppo la tradizione ha reso ambigua e poco chiara la terminologia sulle serie, ma queste nomenclature sono così radicate nell'uso che non vale la pena di proporre una modifica. Del resto, inoltre, il contesto rende sempre chiaro di che cosa si stia parlando.

La definizione che abbiamo dato di serie numerica, forse un po' troppo formale, mette tuttavia in luce il fatto che nella serie intervengono *due* successioni, legate tra di loro come detto. In ogni caso quello che veramente conta è sapere cosa vuol dire che una serie converge (o diverge), non tanto cosa sia effettivamente una serie. In pratica, di solito, si citano le serie dicendo semplicemente: si consideri la serie di termine generale (a_n), senza fare esplicito riferimento alla coppia di successioni.

Il problema è che, nella stragrande maggioranza dei casi, il calcolo del limite (3) è molto difficile, mentre in molti casi è agevole il calcolo del limite della successione (a_n), limite che però non interviene direttamente nella definizione di convergenza di una serie. Spieghiamoci con qualche esempio.

Esempio 1. Sia (a_n) la successione data da

$$a_n = \frac{1}{n}\,, \quad \text{ovvero} \quad 1,\, \frac{1}{2}\,, \frac{1}{3}\,, \ldots\,, \frac{1}{n}\,, \ldots$$

e consideriamo la successione ad essa associata

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}\,.$$

Ebbene è elementare provare che il limite della successione (a_n) è zero, mentre è abbastanza difficile provare che la successione (s_n) ha limite $+\infty$, cioè che la serie di termine generale (a_n) diverge.

Esempio 2. Sia (a_n) la successione data da

$$a_n = \frac{1}{n^2}\,, \quad \text{ovvero} \quad 1,\ \frac{1}{2^2}\,,\ \frac{1}{3^2}\,,\ \dots\,,\ \frac{1}{n^2}\,,\ \dots$$

e consideriamo la successione ad essa associata

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}\,.$$

Ebbene è elementare provare che il limite della successione (a_n) è zero, mentre è molto difficile provare che la successione (s_n) ha limite $\pi^2/6$.

Esempio 3. Sia (a_n) la successione data da

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n}\,, \quad \text{ovvero} \quad 1,\ -\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{3}\,,\ \dots$$

e consideriamo la successione ad essa associata

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^{i+1}}{i}\,.$$

Ebbene è elementare provare che il limite della successione (a_n) è zero, mentre è abbastanza difficile provare che la successione (s_n) ha limite $\ln(2)$.

In alcuni casi, tuttavia, il calcolo del limite della successione (s_n) è agevole, come mostra il seguente esempio.

Esempio 4. Se

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\,, \quad n > 1\,,$$

si ha

$$s_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

In questo caso è banale sia concludere che il limite della successione (a_n) è 0, sia che il limite della successione (s_n) è 1. Il calcolo del secondo limite è reso possibile dal fatto che la somma degli addendi "si compatta", lasciando sempre solo due termini, il primo e l'ultimo.

Anche se ci sono altri esempi (quello delle "serie geometriche" in primis) in cui il calcolo del limite di (s_n) è agevole, tuttavia si tratta sempre di situazioni sostanzialmente eccezionali.

2 Criteri di convergenza

Nello studio delle serie uno dei fatti fondamentali è che in molti casi si riesce almeno a decidere se la serie converge oppure no, cioè a decidere il *carattere* della serie, sulla base delle proprietà della successione (a_n), senza dover calcolare direttamente il limite della successione (s_n): si tratta dei cosiddetti *criteri di convergenza*. Ne ricordiamo alcuni tra i principali, con l'unico scopo di mostrare quali siano i legami tra le due successioni che, in coppia, costituiscono la serie.

È abbastanza importante il fatto che la convergenza o meno di una serie dipende "solo dagli ultimi addendi", nel senso che, data una successione (a_n) e due naturali n_1 ed n_2, le serie

$$\sum_{i=n_1}^{+\infty} a_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=n_2}^{+\infty} a_i \tag{7}$$

hanno lo stesso carattere (ma, se convergono, *non* la stessa somma!). Pertanto per questioni legate al carattere di una serie si può anche omettere di indicare esplicitamente il valore iniziale dell'indice, e scrivere semplicemente

$$\sum^{+\infty} a_i \,, \tag{8}$$

cosa che faremo nel seguito.

Una condizione necessaria Se la serie converge, la successione (a_n) è infinitesima, ovvero una serie in cui la successione (a_n) non è infinitesima non può convergere.

Una condizione sufficiente Se la successione $(|a_n|)$ è infinitesima di ordine α, con $\alpha > 1$, allora la serie

$$\sum^{+\infty} a_i$$

converge.

Ancora una condizione sufficiente Se la successione (a_n) è infinitesima, a segno alterno e la successione $(|a_n|)$ è monotòna decrescente, allora la serie

$$\sum^{+\infty} a_i$$

converge.

...

In generale le serie a termini di segno costante, cioè in cui $a_n \geq 0$ o $a_n \leq 0$ sono più facile da trattare, perché possono solo convergere o divergere. Inoltre se si ha una serie a termini di segno variabile si può tenere conto che se la serie dei moduli (che è ovviamente a segno costante) converge, converge anche la serie data. In effetti la maggior parte dei criteri di convergenza di uso comune si riferiscono proprio alle serie a termini di segno costante.

In sostanza, per valutare il carattere delle serie, di solito è molto difficile valutare direttamente il limite della successione delle ridotte, e "ci si rifugia" nelle proprietà della successione del termine generale, tentando di applicare uno dei criteri di convergenza.

Purtroppo i criteri di convergenza (tranne il primo di quelli citati) forniscono molto spesso condizioni sufficienti e quindi non sono risolutivi: solo un buon numero di esercizi può aiutarci ad uscire dall'impasse...