Integrali multipli generalizzati

Luciano Battaia[*]

5 dicembre 2010

In questo articolo trattiamo, senza alcuna pretesa di completezza e sistematicità, il problema dell'estensione del concetto di integrale di Riemann in più variabili a funzioni illimitate e a domini di integrazione illimitati.

Indice

Premessa

L'integrale di Riemann, sia in una che in più variabili, richiede come condizione necessaria che la funzione integranda sia limitata nel dominio D di integrazione, e che il dominio D stesso sia limitato.

Per varie ragioni, è opportuno estendere questa nozione anche al caso di funzioni illimitate e di domini di integrazione limitati.

Siamo particolarmente interessati qui ai casi degli integrali doppi o tripli, ma abbiamo voluto anche richiamare brevemente il caso delle funzioni di una variabile, con alcune osservazioni, per l'importanza che ha come modello di base. Una trattazione più dettagliata del caso di una variabile, con numerosi esempi, si può trovare in http://www.batmath.it/matematica/a_int_impropri/int_impropri.htm.

1 Richiami sul caso di una variabile

Definizione 1 (Integrale improprio su intervalli illimitati). *Sia $f\colon I=[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo $[c,d]$ contenuto in I. Allora ha senso, $\forall t\in I$,*

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

[*] http://www.batmath.it

Se

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = l \in \mathbb{R}\,,$$

la funzione si dice integrabile in senso improprio, o generalizzato, *in* I *e si pone*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x = l \tag{1}$$

Analoga definizione se la funzione gode delle stesse proprietà in $I =]-\infty, a]$, che porta alla considerazione dell'integrale

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\,\mathrm{d}x\,, \tag{2}$$

nell'ipotesi che il limite esista finito.

Se poi la funzione gode delle stesse proprietà addirittura in tutto $\mathbb{R}$, allora si può definire l'integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \tag{3}$$

come somma degli integrali

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

purchè *entrambi* gli integrali esistano, ciascuno per proprio conto, finiti, ovvero purché esistano finiti i due limiti

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \lim_{u\to-\infty}\int_u^a f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Osservazione 2. Bisogna prestare particolare attenzione al fatto che l'integrale improprio

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

è definito mediante due limiti che vanno calcolati *separatamente* e che devono esistere, *entrambi*, finiti.

Definizione 3 (Integrale improprio di funzioni illimitate)**.** *Sia* $f\colon I = [a,b]\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$ *una funzione integrabile secondo Riemann in ogni intervallo* $[c,d]$ *contenuto in* I*. La funzione può anche essere illimitata in un intorno di* x_0*. Se* t *e* u *sono punti di* I*, con* $t < x_0$ *e* $u > x_0$*, hanno senso, rispettivamente, gli integrali*

$$\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad t < x_0 \qquad e \qquad \int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad u > x_0\,.$$

Se, ciascuno per proprio conto, esistono finiti i limiti

$$\lim_{t\to x_0^-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \qquad e \qquad \lim_{u\to x_0^+}\int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

allora si pone

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to x_0^-}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x \;+\; \lim_{u\to x_0^+}\int_u^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

Se x_0 coincide con a oppure con b, basta considerare uno solo dei due integrali e limiti precedenti. Se invece di un unico punto x_0, ce ne sono un numero finito con le stesse caratteristiche, basterà "spezzare" l'integrale in corrispondenza di ciascuno dei punti, esattamente come fatto con x_0.

Osservazione 4. Bisogna prestare particolare attenzione al fatto che l'integrale improprio

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

è definito mediante due limiti che vanno calcolati *separatamente* e che devono esistere, *entrambi*, finiti.

Per capire l'importanza delle Osservazioni 2 e 4 precedenti si veda l'esempio seguente.

Esempio 1. Consideriamo le funzioni

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{2x}{1+x^4}\,,$$

e calcoliamo i due integrali seguenti:

$$\int_{-t}^{t} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(1+x^2)\right]_{-t}^{t} = 0 \quad \text{e} \quad \int_{-t}^{t} \frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \left[\operatorname{arctg}(x^2)\right]_{-t}^{t} = 0\,,$$

da cui deduciamo che, in entrambi i casi, il limite per $t \to +\infty$ vale 0.

Se però modifichiamo l'intervallo di integrazione in $[-t, 2t]$ otteniamo:

$$\int_{-t}^{2t} \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\ln(1+x^2)\right]_{-t}^{2t} = \frac{\ln(1+t^2)}{\ln(1+4t^2)}\,,$$

$$\int_{-t}^{2t} \frac{2x}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \left[\operatorname{arctg}(x^2)\right]_{-t}^{t} = \operatorname{arctg}(4t^2) - \operatorname{arctg}(t^2)\,,$$

da cui deduciamo che nel primo caso il limite per $t \to +\infty$ vale 1, mentre nel secondo continua a valere 0. Si noti che, dal punto di vista geometrico, per ciascuna delle due funzioni si ottiene, in entrambi i casi, la stessa regione piana.

Il motivo di questo diverso comportamento sta nel fatto che, per la prima funzione, l'integrale improprio secondo la definizione 1 diverge, mentre, nel secondo caso, converge. In sostanza se sappiamo che l'integrale converge secondo la definizione 1, allora possiamo far tendere l'intervallo di integrazione a tutto $\mathbb{R}$ in un modo qualunque, altrimenti no.

Esaminiamo un ulteriore esempio.

Esempio 2. Per valutare
$$\int_0^{+\infty} \cos x \,\mathrm{d}x$$
dobbiamo calcolare
$$\lim_{t\to+\infty} \int_0^t \cos x \,\mathrm{d}x = \lim_{t\to+\infty} \big[\sin x\big]_0^t = \lim_{t\to+\infty} \sin t\,,$$
e come ben sappiamo questo limite non esiste. Se però calcoliamo
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi n} \cos x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \big[\sin x\big]_0^{2\pi n} = \lim_{n\to+\infty} \sin 2\pi n = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0\,.$$
Se, infine, calcoliamo
$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}+2\pi n} \cos x \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \big[\sin x\big]_0^{\frac{\pi}{2}+2\pi n} = \lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 = 1\,.$$

Ancora una volta, se l'integrale non converge secondo la definizione 1, a seconda del modo in cui facciamo tendere l'intervallo di integrazione a quello richiesto (in questo caso a $[0,+\infty[$), otteniamo risultati diversi.

2 Misura di insiemi illimitati di $\mathbb{R}^n$

Definizione 5. *Sia D un sottoinsieme illimitato di $\mathbb{R}^n$ e I un intervallo*[1] *qualunque di $\mathbb{R}^n$. L'insieme D si dice misurabile se*
$$D \cap I$$
è misurabile qualunque sia I.

Se D è misurabile, il
$$\sup\{\,\mathrm{mis}(D\cap I), I\subset\mathbb{R}^n, I \textit{ intervallo}\,\} \tag{5}$$
si chiama misura *di D.*

Se ne deduce che un insieme illimitato D di $\mathbb{R}^n$ può avere come misura una numero reale non negativo, oppure $+\infty$.

Naturalmente occorrerà che la misura definita mediante la (5) soddisfi a tutte le proprietà richieste ad una funzione di misura; in particolare per poter parlare di additività occorre porre
$$a + (+\infty) = +\infty\,, \quad \forall a \geq 0,$$
cioè la misura dell'unione tra un insieme di misura a e uno di misura $+\infty$ è $+\infty$.

Esempio 3. Si consideri il sottoinsieme D di $\mathbb{R}^2$ definito come segue
$$D = \left\{ (x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1\leq x<+\infty,\ 0\leq y\leq \frac{1}{x^2} \right\},$$

[1] Un intervallo di $\mathbb{R}^n$ è un insieme del tipo
$$[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times\cdots\times[a_n,b_n]\,.$$

rappresentato nella figura 1.

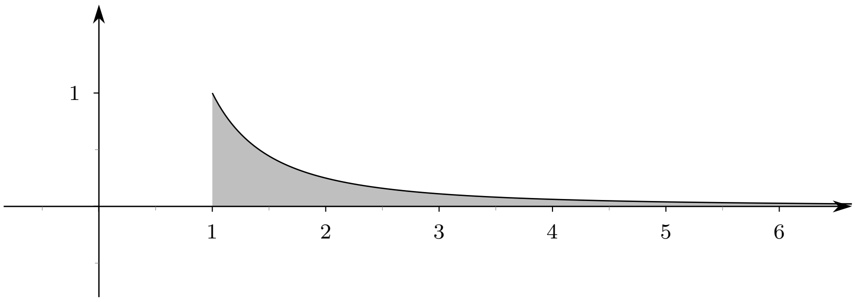

Figura 1 *Un insieme illimitato misurabile*

L'insieme è misurabile perché la sua intersezione con un qualunque rettangolo di $\mathbb{R}^2$ o è vuota, o è un punto, o un segmento, o un trapezoide di funzione continua.

Per determinare la misura di un insieme illimitato (quando si sappia che è misurabile), non è necessario calcolare l'estremo superiore indicato nella formula (5), ma si può ricondurre tale ricerca ad una operazione di limite di successioni, nel modo che segue.

Definizione 6. *Sia*

$$E_1,\, E_2,\, \dots,\, E_n,\, \dots \tag{6}$$

una successione di insiemi limitati e misurabili di $\mathbb{R}^n$*. Diremo che la successione* (6) invade *tutto* $\mathbb{R}^n$ *se*

1. $E_n \subseteq E_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$*;*
2. *comunque si fissi un rettangolo* R *di* $\mathbb{R}^n$*, esiste un insieme* E_p *della successione* (6) *che lo contiene.*

Per il calcolo della misura di D (ripetiamo, quando si sappia che D è misurabile), vale il seguente teorema.

Teorema 7. *Se* D *è un insieme misurabile di* $\mathbb{R}^n$ *(limitato o no), e*

$$E_1,\, E_2,\, \dots,\, E_n,\, \dots$$

è una qualunque successione invadente $\mathbb{R}^n$*, si ha*

$$\operatorname{mis}(D) = \lim_{n\to+\infty} \operatorname{mis}(D \cap E_n)\,. \tag{7}$$

Con riferimento all'esempio 3, avendo già provato che l'insieme D è misurabile, ne calcoliamo la misura scegliendo come successione invadente $\mathbb{R}^2$ la successione dei rettangoli

$$R_n = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -n \le x \le n,\ -n \le y \le n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \,\right\}.$$

La situazione corrispondente è illustrata nella figura 2.

L'insieme $D \cap E_n$ è il trapezoide

$$T = \left\{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \le x \le n,\ 0 \le y \le \frac{1}{x^2} \,\right\},$$

trapezoide la cui area si misura con un semplice integrale di Riemann; da qui si ottiene

$$\operatorname{mis}(D \cap E_n) = 1\frac{1}{n} \ \Rightarrow\ \operatorname{mis}(D) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1\,,$$

valore che, come è noto (e come è giusto che sia!), coincide con

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

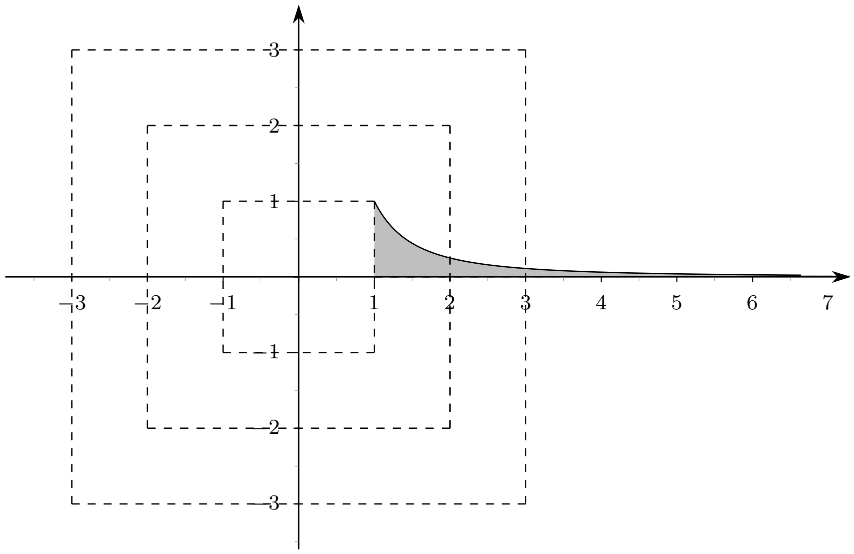

Figura 2 *Misura dell'insieme della figura 1*

3 Integrale improprio di una funzione generalmente continua

Definizione 8. *Se $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ (eventualmente con misura infinita) e N è un sottoinsieme di A di misura nulla, sia*

$$f\colon A \to \mathbb{R} \tag{8}$$

una funzione continua su $A \setminus N$. Diremo allora che f è generalmente continua *su A.*

Vogliamo estendere la nozione di integrale di Riemann a una funzione f generalmente continua su un insieme A (eventualmente illimitato). Per questo consideriamo l'insieme di tutti i compatti K misurabili che siano sottoinsiemi di $A \setminus N$. Poiché f, e quindi anche $|f|$, risulta continua se ristretta a K, e inoltre K è limitato, ha senso considerare

$$\int \cdots \int_K |f(\vec{x})|\,\mathrm{d}m\,. \tag{9}$$

Se f è una arbitraria funzione di A in $\mathbb{R}$, si considerano le seguenti due funzioni, non negative su A:

$$f_+(\vec{x}) = \frac{|f(\vec{x})| + f(\vec{x})}{2}\,, \quad \text{e} \quad f_-(\vec{x}) = \frac{|f(\vec{x})| - f(\vec{x})}{2}\,. \tag{10}$$

Si dà allora la seguente definizione.

Definizione 9. *La funzione $f\colon A \to \mathbb{R}$, generalmente continua in A, è* (assolutamente) integrabile in senso improprio *o* generalizzato*, o anche* sommabile*, su A se*

$$\sup\left\{ \int \cdots \int_K |f(\vec{x})|\,\mathrm{d}m \;\middle|\; K \text{ compatto, } K \subseteq A \right\} < +\infty\,. \tag{11}$$

Se f è integrabile su A, si pone

1. $\displaystyle \int\cdots\int_A f(\vec{x})\,\mathrm{d}m = \sup\left\{ \int\cdots\int_K |f|(\vec{x})\,\mathrm{d}m \;\middle|\; K \text{ compatto, } K\subseteq A \right\}$;

2. $\displaystyle \int\cdots\int_A f(\vec{x})\,\mathrm{d}m = \int\cdots\int_A f_+(\vec{x})\,\mathrm{d}m - \int\cdots\int_A f_-(\vec{x})\,\mathrm{d}m.$

Se si sa a priori che una funzione è sommabile su un insieme A, non occorre considerare l'estremo superiore della formula (11); ci si può limitare a considerare il limite, per n tendente all'infinito, della successione degli integrali calcolati su una qualunque successione di compatti *invadente* $D\setminus N$, dove la definizione di successione invadente è, in analogia con la definizione 6, la seguente.

Definizione 10. *Sia $A\subset\mathbb{R}^n$ un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$. La successione di insiemi*

$$T_1,\,T_2,\,\dots,\,T_n,\,\dots \tag{12}$$

è una successione invadente A *se*

1. *$T_n\subseteq T_{n+1}$, $\forall n\in\mathbb{N}$;*
2. *comunque si fissi un sottoinsieme B di A, esiste un insieme T_p della successione (14) che lo contiene.*

In particolare per una funzione non negativa in A si ha il seguente risultato.

Teorema 11. *Una funzione $f\colon A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, generalmente continua in A e* non negativa, *è sommabile in A se e solo si ha*

$$\lim_{n\to+\infty}\int\cdots\int_{K_n} f(\vec{x})\,\mathrm{d}m = l < +\infty\,, \tag{13}$$

ove $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di compatti invadenti $A\setminus N$.

In questo caso si ottiene

$$\int\cdots\int_A f(\vec{x})\,\mathrm{d}m = \lim_{n\to+\infty}\int\cdots\int_{K_n} f(\vec{x})\,\mathrm{d}m\,. \tag{14}$$

4 Qualche esempio

Esempio 4. Calcolare

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,.$$

Essendo la funzione sempre positiva, si può prendere una qualunque successione invadente $\mathbb{R}^2$. Vista la simmetria circolare della funzione stessa, conviene scegliere la successione dei cerchi di centro l'origine e raggio $n\in\mathbb{N}$: C_n. Si ha, utilizzando un passaggio in coordinate polari,

$$\iint_{C_n}\frac{1}{1+(x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{\Delta}\frac{1}{1+\varrho^4}\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\,\mathrm{d}\vartheta = \int_0^{2\pi}\left(\int_0^n\frac{1}{1+\varrho^4}\,\varrho\,\mathrm{d}\varrho\right)\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\left(\left[\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\varrho^2\right]_0^n\right)\mathrm{d}\vartheta = \pi\operatorname{arctg} n^2\,.$$

Da qui si deduce subito

$$\lim_{n\to+\infty}\pi\operatorname{arctg} n^2 = \frac{\pi^2}{2}\,.$$

La situazione è illustrata nella figura 3.

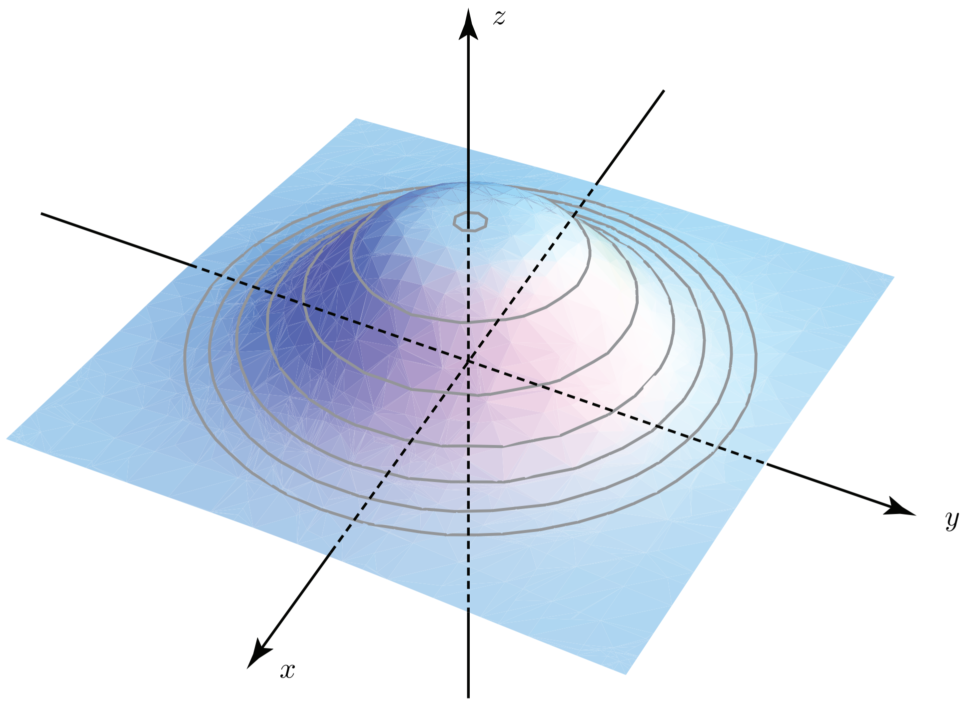

Figura 3 *La funzione* $1/1+(x^2+y^2)^2$

Esempio 5. Calcolare

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$

essendo A il dominio illimitato dato da

$$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x < +\infty,\ 0 \le y \le \frac{1}{x} \right\},$$

rappresentato nella figura 4.

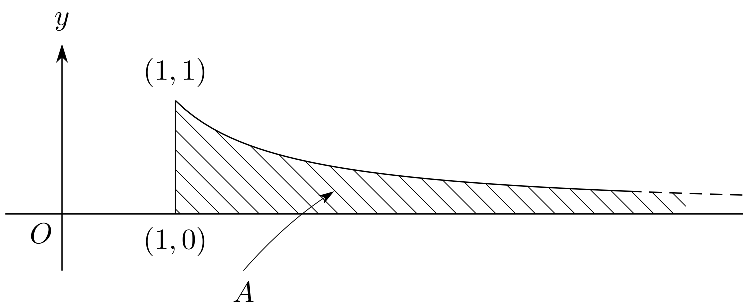

Figura 4 *Il dominio di integrazione per l'esempio 5*

Possiamo scegliere come domini compatti invadenti A gli insiemi A_n definiti da

$$A_n = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 0 \le x < n,\ 0 \le y \le \frac{1}{x} \right\},$$

rappresentati nella figura 5.

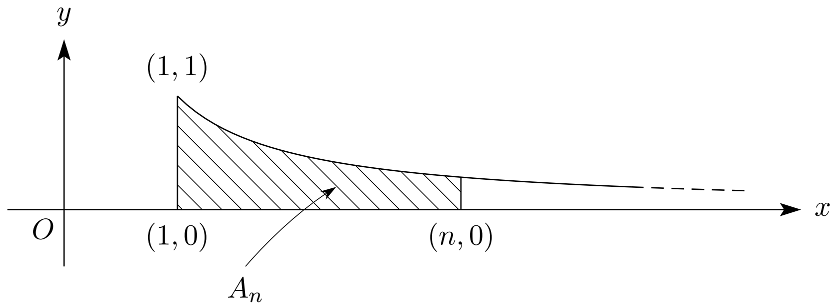

Figura 5 *Domini invadenti per l'esempio 5*

Calcolando l'integrale sul generico dominio della famiglia di domini invadenti otteniamo quanto segue.

$$\iint_{A_n} \frac{1}{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_1^n \left(\int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2+y^2} \right) \mathrm{d}x = \int_1^n \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

L'ultimo integrale non è elementarmente calcolabile, ma si può osservare che sicuramente il limite per $n \to +\infty$ è finito, in quanto si ha

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x^3}\,,$$

da cui si deduce che l'integrale generalizzato

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

converge, essendo la funzione $1/x^3$ integrabile su $[1,+\infty[$.

La figura 6 illustra la situazione.

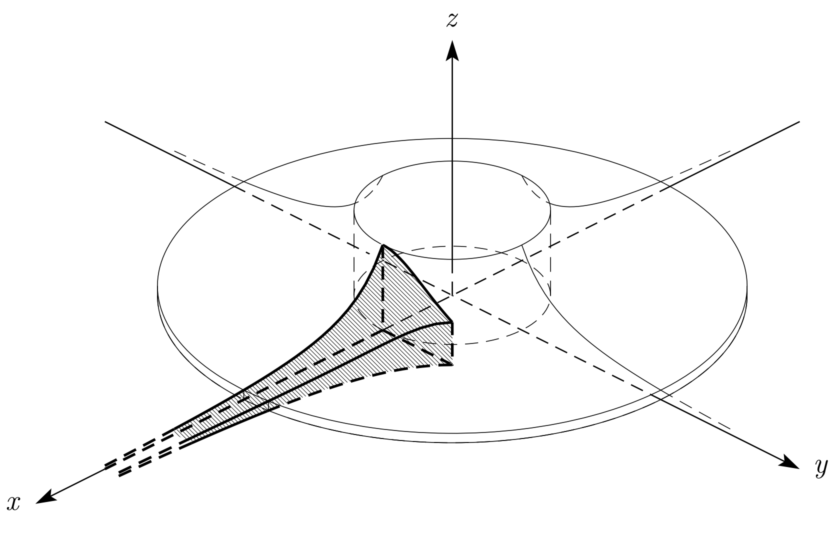

Figura 6 *Integrale di* $1/x^2+y^2$

Si noti che l'area della regione A del piano è infinita e che, nonostante questo fatto, il volume evidenziato nella figura 6 è finito.