Osservazioni sulle funzioni composte

Luciano Battaia(*)

30 dicembre 2009

Scopo di questo articolo è di trattare alcuni problemi legati alla derivabilità delle funzioni composte, nel caso di funzioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$. Non si pretende di fornire una trattazione sistematica ed esaustiva, ma solo di evidenziare i concetti fondamentali.

Introduzione

La composizione è una operazione di enorme importanza nel costruire nuove funzioni. In questo articolo mi occupo solo di funzioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$, e in particolare di questioni connesse alla derivabilità. Anche in questo tipo di problemi emerge l'importanza del concetto di differenziabilità, rispetto a quello semplice di derivabilità, in particolare quando si passa da funzioni di una variabile a funzioni di più variabili.

Per completezza richiamiamo innanzitutto brevemente la definizione di funzione composta. Siano $f\colon A \to B$ e $g\colon C \to D$ due funzioni e supponiamo che $f(A) \subseteq C$. Allora è possibile costruire la funzione composta $h\colon A \to D$, che ad ogni x di A faccia corrispondere il punto $g(f(x))$ in D. Il valore $g(f(x))$ è calcolabile perché, per ipotesi, $f(A) \subseteq C$. La funzione h si chiama *composta di f e g* e si scrive

$$h = g \circ f\,. \tag{1}$$

Ricordiamo altresì che una funzione $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ può essere sempre assegnata come una m-upla di funzioni di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$:

$$f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\,, \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \begin{cases} y_1 & = & f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 & = & f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ y_m & = & f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{cases}\,. \tag{2}$$

Sono particolarmente importanti i casi di funzioni di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ (curve del piano o dello spazio) e di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^3$ (superfici dello spazio). In questi casi si usano di solito le notazioni seguenti:

$$f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} x = f_1(t) \\ y = f_2(t) \end{cases}, \text{ o anche } t \mapsto \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \tag{3a}$$

$$f\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{cases} x = f_1(t)) \\ y = f_2(t) \\ z = f_3(t) \end{cases}, \text{ o anche } t \mapsto \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \tag{3b}$$

*http://www.batmath.it

(3c) $$f\colon A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\quad t\mapsto\begin{cases} x=f_1(u,v)\\ y=f_2(u,v)\\ z=f_3(u,v)\end{cases},\ \text{o anche } t\mapsto\begin{cases} x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}$$

o altre simili, che risulteranno chiare dal contesto.

Le variabili t, u, v si chiamano parametri e le (3a) e (3b) si chiamano *equazioni parametriche* della curva, mentre le (3c) si chiamano *equazioni parametriche* della superficie.

1 Esempi

1. Date le funzioni
$$f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\sin x \quad \text{e} \quad g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\sqrt[3]{x}\,,$$
possiamo considerare entrambe le funzioni composte
$$h=f\circ g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(x)=\sin\sqrt[3]{x}\,,\quad \text{e}\quad l=g\circ f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ l(x)=\sqrt[3]{\sin x}\,.$$

2. Date le funzioni
$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2-xy \quad \text{e} \quad g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g(x)=\cos(3x^2-x)\,,$$
possiamo considerare la funzione composta
$$h=g\circ f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ h(x,y)=\cos\big(3(x^2-xy)^2-(x^2-xy)\big)=\cos(3x^4-6x^3y+3x^2y^2-x^2+xy),$$
mentre non ha senso la funzione composta nell'ordine inverso.

3. Date le funzioni
$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2-xy \quad \text{e} \quad g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2,\ g(t)=\begin{cases} x=\cos t\\ y=-t^2\end{cases},$$
possiamo considerare sia la funzione composta
$$h=f\circ g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ h(t)=(\cos t)^2-(\cos t)(-t^2)=\cos^2 t+t^2\cos t\,,$$
che la funzione composta nel'ordine inverso
$$l=g\circ f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ l(x,y)=\begin{cases} l_1(x,y)=\cos(x^2-xy)\\ l_2(x,y)=-(x^2-xy)^2=-x^4+2x^3y-x^2y^2\end{cases}.$$

4. Date le funzioni
$$f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ f(x,y)=x^2-y^2 \quad \text{e} \quad g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ g(x,y)=\begin{cases} g_1(x,y)=xy\\ g_2(x,y)=y-x\end{cases},$$
possiamo considerare la funzione composta
$$h=f\circ g\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ h(x,y)=(xy)^2-(y-x)^2=x^2y^2-y^2+2xy-x^2\,,$$
mentre non ha senso la funzione composta nell'ordine inverso.

5. Date le funzioni

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \begin{cases} f_1(x,y) = x+y \\ f_2(x,y) = x^2y \end{cases} \quad \text{e} \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = \begin{cases} g_1(x,y) = xy \\ g_2(x,y) = y-x \end{cases},$$

possiamo considerare sia la funzione composta

$$h = f\circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ h(x,y) = \begin{cases} h_1(x,y) = (xy)+(y-x) = xy+y-x \\ h_2(x,y) = (xy)^2(y-x) = x^2y^3 - x^3y^2 \end{cases},$$

che la funzione composta

$$l = g\circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ l(x,y) = \begin{cases} l_1(x,y) = (x+y)(x^2y) = x^3y + x^2y^2 \\ l_2(x,y) = (x^2y)-(x+y) = x^2y - x - y \end{cases}.$$

6. Date le funzioni

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x+2yz \quad \text{e} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ g(t) = \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = 1-t \end{cases},$$

possiamo considerare sia la funzione composta

$$h = f\circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(t) = \sin(t) + 2t^2(1-t) = \sin t + 2t^2 - 2t^3\,,$$

che la funzione composta

$$l = g\circ f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ l(x,y,z) = \begin{cases} l_1(x,y,z) = \sin(x+2yz) \\ l_2(x,y,z) = (x+2yz)^2 = x^2 + 4xyz + 4y^2z^2 \\ l_3(x,y,z) = 1-(x+2yz) = 1-x-2yz \end{cases}.$$

7. Date le funzioni

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ f(x,y,z) = x+2yz \quad \text{e} \quad g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ g(u,v) = \begin{cases} x(u,v) = u+\sin v \\ y(u,v) = u+v \\ z(u,v) = u-v \end{cases},$$

possiamo considerare la funzione composta

$$h = f\circ g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ h(u,v) = (u+\sin v) + 2(u+v)(u-v) = u + \sin v + 2u^2 - 2v^2\,.$$

8. Date le funzioni

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = x + \sin(xy) \quad \text{e} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ g(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \\ z(t) = t^3 \end{cases},$$

possiamo considerare la funzione composta

$$h = g\circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ h(x,y) = \begin{cases} h_1(x,y) = x+\sin(xy) \\ h_2(x,y) = (x+\sin(xy))^2 \\ h_3(x,y) = (x+\sin(xy))^3 \end{cases}.$$

2 Continuità e derivabilità

La composta di due funzioni continue è ancora una funzione continua. Purtroppo, invece, la composta di due funzioni derivabili parzialmente non è generalmente una funzione derivabile parzialmente, anzi potrebbe non essere nemmeno continua. Si possono, a questo proposito, considerare diversi esempi, tra cui il seguente.

Siano date le funzioni

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{se} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{e} \quad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ g(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 \end{cases}$$

e consideriamo la funzione composta

$$h = f \circ g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(t) = \begin{cases} 1/2 & \text{se} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t = 0 \end{cases},$$

funzione palesemente non derivabile in 0 in quanto nemmeno continua.

La funzione f è parzialmente derivabile nell'origine rispetto a ogni direzione; detto infatti $\vec{u} = (l,m)$ un versore di $\mathbb{R}^2$, la direzione orientata r per l'origine, di versore $\vec{u}$ è:

$$r\colon \begin{cases} x = lt \\ y = mt \end{cases}.$$

Dunque la funzione subordinata da f su questa direzione è

$$f(lt,mt) = \begin{cases} \dfrac{l^2t}{l^4t^2+m^2} & \text{se} \quad t \neq 0 \\ 0 & \text{se} \quad t = 0 \end{cases}.$$

È immediato provare che questa funzione è derivabile per ogni $\vec{u} = (l,m)$ e che, di conseguenza, si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = \dfrac{l^2}{m^2}, & \text{se} \quad m \neq 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(0,0) = 0, & \text{se} \quad m = 0 \end{cases}.$$

D'altro canto la funzione g è palesemente derivabile, anzi differenziabile in quanto funzione di una sola variabile[1], e ha derivata data da

$$g'(t) = \begin{cases} x'(t) = 1 \\ y(t) = 2t \end{cases}$$

.

Dunque la funzione composta tra la f, che è parzialmente derivabile lungo ogni direzione orientata per l'origine, e la funzione g, addirittura differenziabile ovunque, non è derivabile (anzi nemmeno continua): si usa dire che le funzioni derivabili *non sono stabili* per composizione.

È questo uno dei motivi (non è l'unico) che rendono il concetto di derivata parziale troppo debole per poter essere considerato la generalizzazione del concetto di derivata introdotto per funzioni di una variabile. Infatti, nel caso di funzioni reali di una sola variabile reale, la composta di due funzioni derivabili è derivabile, cosa che, come abbiamo visto, non succede in più dimensioni.

Vale invece il seguente teorema che richiede la differenziabilità, anziché la semplice derivabilità.

[1] Ricordiamo che per una funzione di una sola variabile reale la derivabilità implica sempre la differenziabilità, indipendentemente da quale sia il codominio.

Teorema 1. *Siano $f\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ una funzione differenziabile in $\vec{x}_0\in A$ e $g\colon B\subset\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}^m$, una funzione differenziabile in $\vec{y}_0=f(\vec{x}_0)\in B$; sia inoltre $h=g\circ f\colon A\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ la funzione composta di f e g. Allora h è differenziabile in $\vec{x}_0$ e si ha*

$$\mathrm{d}h_{\vec{x}_0}(\vec{x}-\vec{x}_0)=\mathrm{d}g_{\vec{y}_0}(\vec{y}-\vec{y}_0)\circ\mathrm{d}f_{\vec{x}_0}(\vec{x}-\vec{x}_0). \tag{4}$$

Siccome la differenziabilità implica l'esistenza delle derivate (eventualmente parziali se si tratta di funzioni di più variabili), ne concludiamo che per funzioni differenziabili le derivate parziali possono essere calcolate non solo direttamente, scrivendo esplicitamente la funzione composta come abbiamo fatto negli esempi del paragrafo 1, ma anche applicando (in maniera opportuna!) la formula (4).

Per i più volenterosi proporremo più avanti, vedi il paragrafo 3, una tecnica generale, basata sulle matrici jacobiane, per l'uso efficiente della formula (4). Qui ci limitiamo a esporre le regole nei casi di uso più comune.

1. Siano f una funzione reale di due variabili, $(x,y)\mapsto f(x,y)$, e g una funzione di una variabile, $x\mapsto g(x)$, e consideriamo la funzione composta h di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$, $h(x,y)=(g\circ f)(x,y)=g(f(x,y))$. Allora
$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)=g'\big(f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)=g'\big(f(x,y)\big)\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,.$$

2. Siano f una funzione reale di due variabili, $(x,y)\mapsto f(x,y)$, e $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$, $g(t)=\big(g_1(t),g_2(t)\big)$ una curva del piano. Consideriamo la funzione composta h di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, $h(t)=(f\circ g)(t)=f\big(g_1(t),g_2(t)\big)$. Allora
$$h'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\big(g_1(t),g_2(t)\big)g_1'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(g_1(t),g_2(t)\big)g_2'(t)\,.$$

3. Siano f una funzione reale di due variabili, $(x,y)\mapsto f(x,y)$, e g una funzione di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$, $g(x,y)=\big(g_1(x,y),g_2(x,y)\big)$. Consideriamo la funzione composta $h=f\circ g$ di $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}$, $h(x,y)=f\big(g_1(x,y),g_2(x,y)\big)$. Allora
$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)&=\frac{\partial f}{\partial x}\big(g_1(x,y),g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(g_1(x,y),g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)\,,\\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y)&=\frac{\partial f}{\partial x}\big(g_1(x,y),g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(g_1(x,y),g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y)\,.\end{aligned}$$

3 Matrice jacobiana

Ricordiamo che, per una funzione f di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ si può definire, in un punto $\vec{x}_0$ dove esistono le derivate parziali, la seguente matrice, detta matrice jacobiana.

$$J(\vec{x}_0)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}\end{pmatrix}, \tag{5}$$

dove f_1, f_2, …, f_m sono le componenti della funzione f e tutte le derivate sono calcolate in $\vec{x}_0$.

In termini di matrici jacobiane il teorema sul differenziale di una funzione composta si può scrivere come segue.

$$J_h(\vec{x}_0)=J_g(\vec{y}_0)J_f(\vec{x}_0)\,, \tag{6}$$

cioè la matrice jacobiana della composta è il prodotto delle matrici jacobiane delle due funzioni componenti: è questo, nella sostanza, il teorema di derivazione delle funzioni composte.

Non è difficile verificare che le formule riportate sopra per le derivate di particolari funzioni composte non sono altro che casi particolari di questo risultato generale. Lo vediamo su un esempio specifico, precisamente l'esempio 3.

Si ha
$$J_f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right) ,$$
e quindi
$$J_f\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\,,\ \frac{\partial f}{\partial y}\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big) \right) .$$
Si ha poi
$$J_g(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} .$$
Tenendo conto che
$$J_h(x,y) = J_f\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\, J_g(x,y)\,,$$
si ottiene, mediante il prodotto righe per colonne (matrice 1×2 da moltiplicare per una matrice 2×2),
$$\begin{aligned} J_h(x,y) = \bigg(&\frac{\partial f}{\partial x}\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial x}(x,y)\ , \\ &\frac{\partial f}{\partial x}\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_1}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(g_1(x,y), g_2(x,y)\big)\frac{\partial g_2}{\partial y}(x,y) \bigg) , \end{aligned}$$
cioè esattamente le due derivate parziali della funzione h già trovate precedentemente.