

Osservazioni sul baricentro

Luciano Battaia^(*)

1 dicembre 2010

La prima volta che si introduce una definizione di *baricentro* è, di norma, nella geometria del triangolo, dove il baricentro è definito come punto di intersezione delle tre mediane. Successivamente la stessa denominazione è introdotta in fisica, dove il baricentro è definito come il punto ottenuto facendo la media pesata di un insieme di punti materiali. Purtroppo, anche nel semplice caso di triangoli, i due concetti non sempre coincidono e bisogna dunque prestare la massima attenzione. Qualche ulteriore difficoltà collegata al concetto di baricentro si incontra nel passaggio dalle linee, alle superfici, ai volumi.

Scopo di questo articolo è di mettere in luce questi fatti, al fine di prevenire grossolani errori.

Indice

Premessa	1
1 Definizioni	1
2 Il caso dei triangoli	3
3 Asta e settore circolare	6
4 Triangolo e settore conico	9

Premessa

Queste pagine servono anche come esercizio relativamente agli integrali doppi, tripli, curvilinei e superficiali. Per questo motivo a volte i calcoli sono molto dettagliati, anche quando il risultato potrebbe essere dedotto per via elementare.

1 Definizioni

Definizione 1 (Baricentro di un triangolo). *Dato un triangolo ABC , si definisce baricentro (geometrico) del triangolo il punto, G , di intersezione delle tre mediane dei lati.*

Naturalmente per poter dare questa definizione occorre avere preventivamente dimostrato che le tre mediane si incontrano in uno stesso punto.

^{*}<http://www.batmath.it>

In questa definizione si può pensare al triangolo sia come una terna di punti, sia come una poligonale chiusa con tre lati, sia come la superficie racchiusa dalla poligonale stessa.

Se si è introdotto un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$ nello spazio⁽¹⁾, non è difficile provare che le coordinate del baricentro così definito sono la media delle coordinate dei tre vertici.

$$(1) \quad x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}, \quad z_G = \frac{z_A + z_B + z_C}{3}.$$

Definizione 2 (Centro di massa di un sistema di punti). *Siano A_1, A_2, \dots, A_n , n punti di masse rispettive m_1, m_2, \dots, m_n , e sia O un punto dello spazio. Si chiama baricentro (fisico) o centro di massa degli n punti, il punto G individuato da*

$$(2) \quad \overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}}{\sum_{i=1}^n m_i} \quad \text{ovvero} \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^n m_i \overrightarrow{OA_i}.$$

Si dimostra che il punto G non dipende dalla scelta di O . Se nello spazio è stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$, le coordinate di G si trovano facendo la media pesata delle coordinate (x_i, y_i, z_i) degli A_i , con pesi uguali alle masse dei punti A_i :

$$(3) \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) x_G = \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) y_G = \sum_{i=1}^n m_i y_i, \quad \left(\sum_{i=1}^n m_i \right) z_G = \sum_{i=1}^n m_i z_i.$$

È chiaro che le (3) si riducono alle (1) nel caso di 3 punti con massa identica.

Per i corpi continui la definizione andrà adeguatamente modificata, sostituendo le masse con le densità di massa e le somme con gli opportuni integrali. Riportiamo in dettaglio le definizioni per i vari casi di interesse, anche se, nella sostanza, si tratta solo di riscritture di un'unica definizione.

Sbarre rettilinee

Detti A e B gli estremi della sbarra, e scelto un sistema di coordinate cartesiane Ox sulla retta a cui la sbarra appartiene, indichiamo con a e b le ascisse di A e B rispettivamente. Sia poi $\mu(x)$ la densità (lineare) di massa. Si ha allora

$$(4) \quad \left(\int_a^b \mu(x) dx \right) x_G = \int_a^b x \mu(x) dx,$$

e formule analoghe per le coordinate y e z .

Lamine piane

Sia D (normalmente la chiusura di un aperto connesso) la regione occupata dalla lamina nel piano in cui è stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane Oxy . Se $\mu(x, y)$ è la densità di massa, si ha

$$(5) \quad \left(\iint_D \mu(x, y) dx dy \right) x_G = \iint_D x \mu(x, y) dx dy,$$

e formule analoghe per le coordinate y e z .

¹Poiché tre punti stanno sempre su uno stesso piano, ci si potrebbe limitare a un sistema di coordinate cartesiane Oxy in un piano per i tre punti; abbiamo preferito pensare a un sistema nello spazio, in vista delle estensioni successive.

Continui tridimensionali

Sia V (normalmente la chiusura di un aperto connesso) la regione occupata dal corpo continuo nello spazio in cui è stato introdotto un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$. Se $\mu(x, y, z)$ è la densità di massa, si ha

$$(6) \quad \left(\iiint_V \mu(x, y, z) dx dy dz \right) x_G = \iiint_V x \mu(x, y, z) dx dy dz,$$

e formule analoghe per le coordinate y e z .

Sbarre non rettilinee

Sia γ una qualunque curva avente per sostegno la sbarra. Se $\mu(x, y, z)$ è la densità di massa, si ha

$$(7) \quad \left(\int_{\gamma} \mu(x, y, z) ds \right) x_G = \int_{\gamma} x \mu(x, y, z) ds,$$

e formule analoghe per le coordinate y e z . Se la sbarra è piana ci si può naturalmente limitare a considerare curve piane.

Lamine non piane

Sia σ una qualunque superficie avente per sostegno la lamina. Se $\mu(x, y, z)$ è la densità di massa, si ha

$$(8) \quad \left(\iint_{\sigma} \mu(x, y, z) d\sigma \right) x_G = \iint_{\sigma} x \mu(x, y, z) d\sigma,$$

e formule analoghe per le coordinate y e z .

2 Il caso dei triangoli

Come già osservato, se A, B, C sono i tre vertici di un triangolo su cui sono posti tre punti con masse identiche, il baricentro fisico dei tre punti coincide con il baricentro geometrico.

Anche per le lamine triangolari omogenee si ha coincidenza tra i due punti. Lo proviamo, usando solo la definizione, per una lamina a forma di triangolo acutangolo posizionato come nella figura 1.

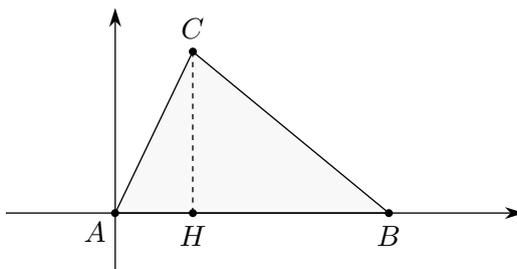


Figura 1 Lamina triangolare omogenea

La lamina triangolare (che costituisce il dominio di integrazione), può essere pensata come l'unione di due domini normali rispetto all'asse x , D_1 e D_2 , costituiti rispettivamente dai triangoli AHC e CHB . Dobbiamo applicare la formula (5). La densità (superficiale) di massa può essere trascurata in quanto, essendo costante, può essere portata fuori sia dall'integrale di sinistra che da quello di destra e semplificata. A questo punto l'integrale di sinistra della (5) fornisce semplicemente l'area del triangolo.

Se $A = (0, 0)$, $B = (x_B, 0)$ e $C = (x_C, y_C)$ sono le coordinate dei tre punti, le rette AC e BC hanno equazione, rispettivamente,

$$y = \frac{y_C}{x_C} x \quad \text{e} \quad y = \frac{y_C}{x_C - x_B} (x - x_B),$$

mentre l'area vale

$$\mathcal{A} = \frac{x_B y_C}{2}.$$

Non ci resta che calcolare l'integrale di destra della (5).

$$\begin{aligned} \iint_{D_1 \cup D_2} x \, dx \, dy &= \int_0^{x_C} x \left(\int_0^{\frac{y_C}{x_C} x} dy \right) dx + \int_{x_C}^{x_B} x \left(\int_0^{\frac{y_C}{x_C - x_B} (x - x_B)} dy \right) dx = \\ &= \int_0^{x_C} \frac{y_C}{x_C} x^2 \, dx + \int_{x_C}^{x_B} \frac{y_C}{x_C - x_B} (x^2 - x x_B) \, dx = \\ &= \left[\frac{y_C}{x_C} \frac{x^3}{3} \right]_0^{x_C} + \left[\frac{y_C}{x_C - x_B} \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} x_B \right]_{x_C}^{x_B} = \\ &= \dots = x_B y_C \frac{x_B + x_C}{6}. \end{aligned}$$

Si ha dunque

$$\frac{x_B y_C}{2} x_G = x_B y_C \frac{x_B + x_C}{6},$$

da cui

$$x_G = \frac{x_B + x_C}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},$$

dove abbiamo tenuto conto, nell'ultimo passaggio, che $x_A = 0$. Discorso analogo per le altre due coordinate.

Lo stesso discorso non vale per un telaio triangolare omogeneo, come mostreremo ora con riferimento alla figura 2, dove manteniamo tutte le stesse notazioni della figura 1.

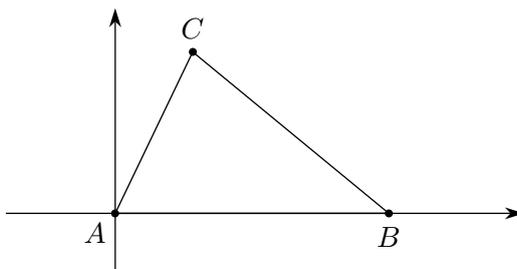


Figura 2 Telaio triangolare omogeneo

Il calcolo si potrebbe fare in via elementare, trovando il baricentro di ciascuna delle tre aste del telaio e poi il baricentro dei tre baricentri, ma preferiamo impostare il calcolo diretto, come utile esercizio di applicazione della formula (7). Scriviamo dunque una parametrizzazione dei tre lati del triangolo e determiniamo la norma dei tre vettori tangenti.

La parametrizzazione di un segmento (in generale dello spazio) si può fare in molti modi: qui scegliamo la via standard (anche se ovviamente non sempre è la più veloce). Detti $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$

e $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ gli estremi del segmento⁽²⁾, si hanno le seguenti formule:

$$(9) \quad \gamma: \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \\ z = z_0 + (z_1 - z_0)t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Nel caso di nostro interesse si ottiene quanto segue.

$$AB: \begin{cases} x = x_B t \\ y = 0 \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \|\vec{T}_{AB}\| = \|(x_B, 0)\| = \sqrt{x_B^2};$$

$$AC: \begin{cases} x = x_C t \\ y = y_C t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \|\vec{T}_{AC}\| = \|(x_C, y_C)\| = \sqrt{x_C^2 + y_C^2};$$

$$BC: \begin{cases} x = x_B + (x_B - x_C)t \\ y = y_C t \end{cases}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad \|\vec{T}_{BC}\| = \|(x_C - x_B, y_C)\| = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + y_C^2}.$$

Osserviamo che la norma dei tre vettori tangenti coincide con la lunghezza dei rispettivi lati del triangolo. Dovremo dividere l'integrale di sinistra e destra della (7) in tre parti, per ciascuno dei tre lati del triangolo. Anche ora, come nel caso della lamina triangolare, la densità (lineare) di massa può essere trascurata, in quanto, essendo costante, può essere portata fuori dagli integrali e semplificata. Il membro di sinistra dell'equazione (7) fornisce allora semplicemente

$$(l_{AB} + l_{AC} + l_{BC})x_G,$$

mentre per il membro di destra si ha

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x_B t \sqrt{x_B^2} dt + \int_0^1 x_C t \sqrt{x_C^2 + y_C^2} dt + \int_0^1 (x_B + (x_C - x_B)t) \sqrt{(x_C - x_B)^2 + y_C^2} dt = \\ & = \int_0^1 x_B t l_{AB} dt + \int_0^1 x_C t l_{AC} dt + \int_0^1 (x_B + (x_C - x_B)t) l_{BC} dt = \\ & = \frac{x_B l_{AB} + x_C l_{AC} + (x_B + x_C) l_{BC}}{2}. \end{aligned}$$

Da qui si deduce subito che

$$x_G = \frac{x_B l_{AB} + x_C l_{AC} + (x_B + x_C) l_{BC}}{2(l_{AB} + l_{AC} + l_{BC})},$$

formula che non fornisce la media delle coordinate degli estremi. Solo se il triangolo è equilatero, ovvero se si ha

$$l_{AB} = l_{AC} = l_{BC} = l,$$

allora dalla formula precedente si ricava

$$x_G = \frac{x_B l + x_C l + (x_B + x_C) l}{2(3l)} = \frac{x_B + x_C}{3} = \frac{x_A + x_B + x_C}{3},$$

²Negli integrali che stiamo considerando (integrali di campi scalari o "ai differenziali d'arco") non conta l'orientamento; negli integrali di campi vettoriali (integrali "ai differenziali delle coordinate") conterebbe anche l'orientamento: seguendo la procedura indicata si tiene facilmente conto anche dell'orientamento, se P_0 indica il primo punto e P_1 il secondo.

dove per l'ultima uguaglianza abbiamo sempre tenuto conto del fatto che $x_A = 0$. Analogo risultato si trova per la coordinata y del baricentro.

Questo risultato in apparenza strano si può capire facilmente se si pensa a un triangolo isoscele ABC , di base AB molto piccola rispetto ai lati obliqui. Il baricentro dei tre lati si trova a metà di ciascun lato: siano M_1 ed M_2 quelli dei due lati obliqui ed M_3 quello della base. Il baricentro complessivo, M , dei due lati obliqui si trova nel punto medio di M_1 ed M_2 . Per avere il baricentro del telaio triangolare si deve ora trovare il baricentro dei due punti M e M_3 : poiché M ha massa molto più grande che non M_3 (in M è concentrata la massa dei due lati obliqui, in M_3 solo quella della base), il baricentro complessivo, G , sarà molto vicino ad M , anzi tanto più vicino a M quanto più la base è piccola. Dunque al tendere a zero della base il baricentro fisico del triangolo tenderà al punto medio dell'altezza, mentre il baricentro geometrico è sempre situato a distanza dalla base pari a un terzo dell'altezza.

3 Asta e settore circolare

Un'asta OA , omogenea e di lunghezza l , ha il baricentro nel centro dell'asta. Se facciamo ruotare di un angolo α l'asta attorno ad O , in un piano, otteniamo un settore circolare OAA' . Se immaginiamo che anche questa lamina abbia densità omogenea, possiamo facilmente trovarne il baricentro. Fissiamo, per questo, un sistema di coordinate come indicato nella figura 3.

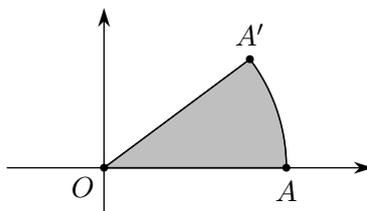


Figura 3 Settore circolare

Dobbiamo applicare la formula (5). Ancora una volta la densità è ininfluente ai fini del calcolo, in quanto, essendo costante, può essere portata fuori dall'integrale sia a sinistra che a destra e semplificata. Il membro di sinistra diventa semplicemente

$$\mathcal{A}x_G = \frac{l^2\alpha}{2}x_G,$$

ove \mathcal{A} indica l'area del settore. Calcoliamo il membro di destra. Indicato con D il settore circolare, si ha, passando in polari,

$$\iint_D x \, dx \, dy = \iint_{\Delta} \varrho \cos \vartheta \, d\varrho \, d\vartheta = \int_0^l \left(\int_0^\alpha \varrho^2 \cos \vartheta \, d\vartheta \right) d\varrho = \frac{l^3}{3} \sin \alpha.$$

Da qui e dalla formula precedente si ricava subito

$$x_G = \frac{2l \sin \alpha}{3\alpha}.$$

Procediamo, in maniera analoga, al calcolo di y_G . Si ottiene:

$$\iint_D y \, dx \, dy = \iint_{\Delta} \varrho \sin \vartheta \, d\varrho \, d\vartheta = \int_0^l \left(\int_0^\alpha \varrho^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \right) d\varrho = \frac{l^3}{3}(1 - \cos \alpha).$$

Tenendo conto che quest'ultimo valore deve essere $\mathcal{A}y_G$, si ricava subito

$$y_G = \frac{2l(1 - \cos \alpha)}{3\alpha},$$

ovvero che il baricentro ha coordinate

$$G = \left(\frac{2l \sin \alpha}{3\alpha}, \frac{2l(1 - \cos \alpha)}{3\alpha} \right).$$

La figura 4 rappresenta la curva descritta da questo baricentro al variare di α tra 0 e 2π . L'andamento della curva è abbastanza prevedibile: all'aumentare dell'angolo α il baricentro si avvicina sempre più al centro del cerchio cui il settore circolare appartiene, per andare a coincidere proprio con il centro quando il settore stesso diventa l'intero cerchio.

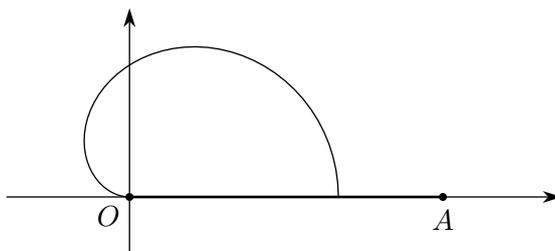


Figura 4 Curva descritta dal baricentro di un settore circolare

La cosa interessante di questa curva è però il fatto che il limite per α tendente a 0 *non* fornisce il baricentro dell'asta, ma il punto

$$G_1 = \left(\frac{2l}{3}, 0 \right).$$

È immediato provare che G_1 è il baricentro di un'asta di lunghezza l come quella dell'esempio considerato, ma di densità non costante e variabile linearmente con x : $\mu = ax$. Per un'asta con densità come questa si ha infatti

$$\left(\int_0^l ax \, dx \right) x_G = \frac{al^2}{2} x_{G_1}, \quad \left(\int_0^l ax x \, dx \right) = \frac{al^3}{3},$$

da cui

$$x_G = \frac{2l}{3}.$$

Anche questo fatto ha una semplice ed intuitiva spiegazione fisica, come illustrato nella figura 5. Se consideriamo un piccolo segmento di corona circolare di raggio interno x e raggio esterno $x + dx$, la sua massa, nell'ipotesi di densità costante, è chiaramente proporzionale alla distanza dal centro del cerchio, qualunque sia l'apertura α del settore: $dm = \mu \alpha x \, dx$: dobbiamo dunque ritenere, per ragioni di continuità, che questa caratteristica si mantenga anche al tendere a zero di α , ovvero quando il settore si riduce ad un'asta rettilinea.

Questo spiega perché al tendere di α a zero il baricentro tenda ad una posizione a distanza $2l/3$ dall'origine.

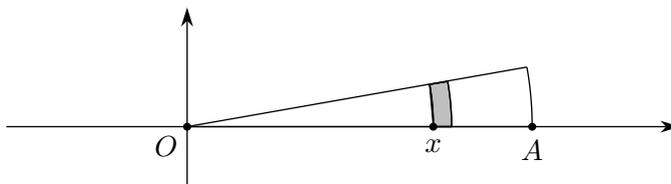


Figura 5 Massa in funzione della distanza in un settore circolare

Per una ulteriore conferma di questo fatto proviamo a calcolare il baricentro di un telaio omogeneo costituito dal profilo del bordo del settore circolare precedente. Dobbiamo però tenere conto che nel caso precedente all'aumentare dell'angolo α il baricentro tendeva al centro del cerchio (come era prevedibile), mentre ora non sarà più così: il telaio corrispondente ad un angolo di 2π sarà costituito dall'intera circonferenza più due barre sovrapposte. Ci interessa però il limite al tendere a 0 dell'angolo α : la situazione fisica corrispondente sarà quella di due barre sovrapposte con densità costante, e quindi ancora una barra con densità costante, per cui dobbiamo aspettarci che la posizione del baricentro tenda al centro della barra stessa.

Anche in questo caso i calcoli potrebbero essere fatti in maniera elementare, almeno per i due lati rettilinei del telaio, ma preferiamo usare la definizione, come utile esercizio. Dobbiamo dunque parametrizzare i tre "lati" del telaio.

La parametrizzazione dei lati rettilinei si fa come già indicato, quella dell'arco di cerchio si fa invece con le funzioni seno e coseno.

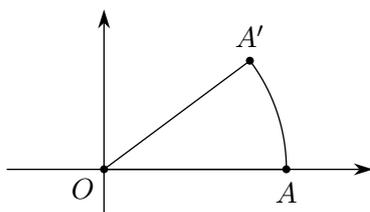


Figura 6 Telaio a forma di bordo di un settore circolare

Tenendo conto che, con riferimento alla figura 6, $O = (0, 0)$, $A = (l, 0)$, $A' = (l \cos \alpha, l \sin \alpha)$, otteniamo quanto segue.

$$OA: \begin{cases} x = lt \\ y = 0 \end{cases}, \quad t \leq 0 \leq 1 \quad \|\vec{T}\| = l$$

$$AA': \begin{cases} x = l \cos t \\ y = l \sin t \end{cases}, \quad t \leq 0 \leq \alpha \quad \|\vec{T}\| = l$$

$$OA': \begin{cases} x = l \cos(\alpha) t \\ y = l \sin(\alpha) t \end{cases}, \quad t \leq 0 \leq 1 \quad \|\vec{T}\| = l$$

Il membro di sinistra della formula (7) si calcola facilmente, in quanto l'integrale che vi compare (dopo avere semplificato, al solito, la densità costante μ) fornisce la lunghezza del nostro telaio: $l + l\alpha + l = 2l + l\alpha$. Calcoliamo il membro di destra, prima per la x , poi per la y .

$$\int_{\gamma} x \, ds = \int_0^1 lt \, dt + \int_0^{\alpha} l \cos(t) \, dt + \int_0^1 l \cos(\alpha) t \, dt = \frac{l^2}{2} + l^2 \sin \alpha + \frac{l^2 \cos \alpha}{2};$$

$$\int_{\gamma} y \, ds = \int_0^1 0 \, dt + \int_0^{\alpha} l \sin(t) \, dt + \int_0^1 l \sin(\alpha) t \, dt = l^2(-\cos \alpha + 1) + \frac{l^2 \sin \alpha}{2}.$$

Si ottiene dunque

$$x_G = \frac{l + 2l \sin \alpha + l \cos \alpha}{4 + 2\alpha}, \quad y_G = \frac{2l(1 - \cos \alpha) + l \sin \alpha}{4 + 2\alpha}.$$

È immediato che il limite per $\alpha \rightarrow 0$ fornisce il punto $G_1 = (l/2, 0)$, cioè esattamente il baricentro della barra singola⁽³⁾. Per contro, come già segnalato, al tendere di α a 2π il baricentro non tenderà all'origine, in quanto il telaio risulta costituito da un'intera circonferenza, più due barre sovrapposte sull'asse delle ascisse: il punto limite è indicato con G_2 nella figura 7.

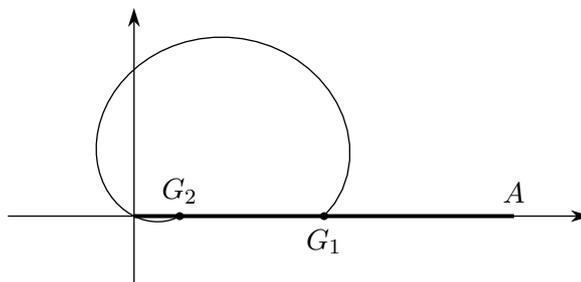


Figura 7 Curva descritta dal baricentro di un telaio a forma di bordo di un settore circolare

4 Triangolo e settore conico

Una lamina omogenea a forma di triangolo rettangolo e isoscele ha il baricentro coincidente con il baricentro geometrico del triangolo. Facendo ruotare di un angolo α questo triangolo attorno a uno dei due cateti si ottiene un solido che ha la forma di un “settore conico”. Vogliamo calcolare il baricentro di questo settore conico e di una lamina che ha la forma della sua superficie totale. Come nel caso dell’asta siamo interessati a valutare il limite del baricentro del solido o della lamina, al tendere a zero di α . Ritroveremo le stesse difficoltà già trattate nel caso della rotazione di un’asta.

Con riferimento alla figura 8, supponiamo di piazzare la lamina nel piano Oxz di un sistema cartesiano ortogonale $Oxyz$; sia inoltre l la lunghezza comune dei due cateti.

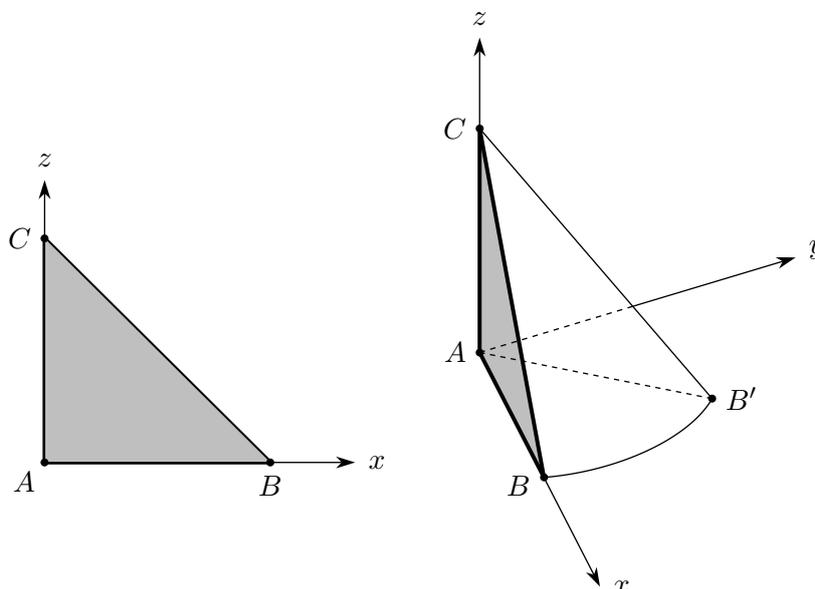


Figura 8 Lamina triangolare e settore conico

³In realtà al tendere di α a 0 si ottengono due barre sovrapposte; essendo però omogenee il baricentro è comunque nel punto medio.

Il baricentro G_1 della lamina triangolare si trova sull'altezza del triangolo relativa alla base BC , in modo che AG_1 sia $2/3$ di quell'altezza. Dunque si ha

$$G_1 = \left(\frac{l}{3}, 0, \frac{l}{3} \right).$$

Per calcolare il baricentro del settore conico dobbiamo applicare la formula (6), dove, ancora una volta, possiamo trascurare la densità in quanto costante. L'integrale che compare a primo membro della (6) rappresenta semplicemente il volume del settore conico che si può calcolare per via diretta:

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{\text{base}} \cdot \text{altezza} = \frac{1}{3} \frac{\alpha l^2}{2} l = \frac{\alpha l^3}{6}.$$

Calcoliamo comunque anche direttamente l'integrale. L'equazione della retta BC nel piano Oxz è $z = -x + l$; pertanto l'equazione della superficie conica ottenuta per rotazione della semiretta situata nel semipiano delle x positive è

$$z = -\sqrt{x^2 + y^2} + l.$$

Detto D il settore circolare ABB' del piano Oxy , il volume V risulta un dominio normale rispetto all'asse z , con

$$(x, y) \in D, \quad 0 \leq z \leq -\sqrt{x^2 + y^2} + l.$$

L'integrale si può dunque calcolare mediante una riduzione per corde e successivo passaggio in coordinate polari.

$$\begin{aligned} \iiint_V dx dy dz &= \iint_D \left(\int_0^{-\sqrt{x^2+y^2}+l} dz \right) dx dy = \iint_D (-\sqrt{x^2+y^2} + l) dx dy = \\ &= \iint_{\Delta} (-\varrho + l) \varrho d\varrho d\vartheta = \int_0^\alpha \left(\int_0^l (-\varrho + l) \varrho d\varrho \right) d\vartheta = \frac{\alpha l^3}{6}. \end{aligned}$$

Calcoliamo ora l'integrale a secondo membro della (6), rispettivamente per la x , la y e la z .

$$\begin{aligned} \iiint_V x dx dy dz &= \iint_D \left(\int_0^{-\sqrt{x^2+y^2}+l} x dz \right) dx dy = \iint_D x (-\sqrt{x^2+y^2} + l) dx dy = \\ &= \iint_{\Delta} \varrho \cos \vartheta (-\varrho + l) \varrho d\varrho d\vartheta = \int_0^\alpha \cos \vartheta \left(\int_0^l (-\varrho + l) \varrho^2 d\varrho \right) d\vartheta = \frac{\alpha l^4}{12} \sin \alpha. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V y dx dy dz &= \iint_D \left(\int_0^{-\sqrt{x^2+y^2}+l} y dz \right) dx dy = \iint_D y (-\sqrt{x^2+y^2} + l) dx dy = \\ &= \iint_{\Delta} \varrho \sin \vartheta (-\varrho + l) \varrho d\varrho d\vartheta = \int_0^\alpha \sin \vartheta \left(\int_0^l (-\varrho + l) \varrho^2 d\varrho \right) d\vartheta = \\ &= \frac{\alpha l^4}{12} (1 - \cos \alpha). \end{aligned}$$

$$\iiint_V z dx dy dz = \iint_D \left(\int_0^{-\sqrt{x^2+y^2}+l} z dz \right) dx dy = \iint_D \frac{(-\sqrt{x^2+y^2} + l)^2}{2} dx dy =$$

$$= \iint_{\Delta} \frac{(l-\varrho)^2}{2} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta = \int_0^\alpha \left(\frac{(l-\varrho)^2}{2} \varrho \, d\varrho \right) d\vartheta = \frac{l^4 \alpha}{24}.$$

Se ne deduce che

$$G = \left(\frac{l \sin \alpha}{2\alpha}, \frac{l(1 - \cos \alpha)}{2\alpha}, \frac{l}{4} \right).$$

Tra l'altro nella formula precedente si ritrova la ben nota proprietà del baricentro di un tetraedro⁽⁴⁾ di essere a quota $1/4$ rispetto alla base.

Come già per il caso del settore circolare, la posizione limite del baricentro appena trovato, al tendere a 0 dell'angolo α non coincide con la posizione del baricentro della lamina triangolare di partenza, in quanto si ottiene il punto

$$\left(\frac{l}{2}, 0, \frac{l}{4} \right).$$

Passiamo ora al calcolo del baricentro della lamina che costituisce la buccia del settore conico appena considerato. Dovremo usare la formula (8). Semplificando, al solito, la densità di massa che supponiamo costante, l'integrale a primo membro fornisce l'area di questa buccia. Si tratta di due triangoli rettangoli isosceli (che indichiamo con Σ_1 e Σ_2), di un settore circolare (la base, che indichiamo con Σ_3), e di una porzione della superficie laterale del cono (che indichiamo con Σ_4). Tutte queste aree possono essere calcolate per via elementare⁽⁵⁾.

$$A = \frac{l^2}{2} + \frac{l^2}{2} + \frac{\alpha l^2}{2} + \frac{\alpha l^2 \sqrt{2}}{2} = \frac{2l^2 + \alpha l^2 + \alpha l^2 \sqrt{2}}{2}.$$

Come utile esercizio calcoleremo comunque l'ultima area con un integrale di superficie. Il contributo all'integrale a secondo membro dato da Σ_1 , Σ_2 e Σ_3 è elementare, ma faremo ugualmente i calcoli con gli integrali di superficie. Per questo scriviamo la parametrizzazione sia di queste tre che della quarta delle parti di cui è costituita la buccia del settore conico.

Le superfici Σ_3 e Σ_4 sono grafici cartesiani, quindi si parametrizzano in maniera naturale:

$$\Sigma_3: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 0 \end{cases}, \quad (u, v) \in D; \quad \Sigma_4: \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = l - \sqrt{u^2 + v^2} \end{cases}, \quad (u, v) \in D.$$

Per quanto riguarda Σ_1 e Σ_2 , si tratta di due parti di piano, di cui è ben noto come si possono scrivere le equazioni parametriche: basta trovare due vettori di giacitura e un punto⁽⁶⁾. Per il primo i vettori di giacitura sono, per esempio, i versori dell'asse $x = (1, 0, 0)$ e dell'asse $z = (0, 0, 1)$, il punto è l'origine. Per il secondo i vettori di giacitura sono, per esempio, il versore dell'asse $z = (0, 0, 1)$ e il versore⁽⁷⁾ di $\overrightarrow{OA'}$, cioè $(\cos \alpha, \sin \alpha, 0)$, il punto è sempre l'origine. Si ha dunque:

$$\Sigma_1: \begin{cases} x = u \\ y = 0 \\ z = v \end{cases}, \quad (u, v) \in T: 0 \leq u \leq l, \quad 0 \leq v \leq -u + l;$$

$$\Sigma_2: \begin{cases} x = u \cos \alpha \\ y = u \sin \alpha \\ z = v \end{cases}, \quad (u, v) \in T: 0 \leq u \leq l, \quad 0 \leq v \leq -u + l.$$

⁴Anche se il volume qui considerato è un settore conico, la situazione di un tetraedro è identica.

⁵L'ultima, in particolare, è data da *arco di base*·*apotema*/2.

⁶Ribadiamo che, pur essendo questo problema elementare, lo vogliamo trattare in dettaglio visti gli scopi didattici di questo articolo.

⁷Si poteva anche prendere il vettore $\overrightarrow{OA'}$: abbiamo preso il versore in modo che il parametro u su Σ_2 vari tra 0 ed l , come su Σ_1 .

Ci servono ancora le norme dei vettori normali alle quattro superfici.

$$\vec{N}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (0, -1, 0) \Rightarrow \|\vec{N}_1\| = 1;$$

$$\vec{N}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\sin \alpha, -\cos \alpha, 0) \Rightarrow \|\vec{N}_2\| = 1;$$

$$\vec{N}_3 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 1) \Rightarrow \|\vec{N}_3\| = 1;$$

$$\vec{N}_4 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \frac{-u}{\sqrt{u^2 + v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-v}{\sqrt{u^2 + v^2}} \end{vmatrix} = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, 1 \right) \Rightarrow \|\vec{N}_4\| = \sqrt{2}.$$

Possiamo ora ricalcolare con un integrale l'area di Σ_4 , già ottenuta prima per via elementare.

$$\iint_{\Sigma_4} d\sigma = \iint_D \|\vec{N}_4\| du dv = \iint_D \sqrt{2} du dv = \iint_{\Delta} \sqrt{2} \rho d\rho d\vartheta = \int_0^\alpha \left(\int_0^l \sqrt{2} \rho d\rho \right) d\vartheta = \frac{\alpha l^2 \sqrt{2}}{2}.$$

Non ci resta infine che procedere con il calcolo dell'integrale a secondo membro della (8), per ciascuna delle tre coordinate del baricentro.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} x d\sigma &= \iint_T u du dv + \iint_T u \cos \alpha du dv + \iint_D u du dv + \iint_D u \sqrt{2} du dv = \\ &= \iint_T u du dv + \iint_T u \cos \alpha du dv + \iint_{\Delta} \rho \cos \vartheta \rho d\rho d\vartheta + \iint_{\Delta} \rho \cos \vartheta \sqrt{2} \rho d\rho d\vartheta = \\ &= \int_0^l \left(\int_0^{-u+l} u dv \right) du + \int_0^l \left(\int_0^{-u+l} u \cos \alpha dv \right) du + \\ &\quad + \int_0^\alpha \left(\int_0^l \rho^2 \cos \vartheta d\rho \right) d\vartheta + \int_0^\alpha \left(\int_0^l \sqrt{2} \rho^2 \cos \vartheta d\rho \right) d\vartheta = \\ &= \frac{l^3}{6} + \frac{l^3 \cos \alpha}{6} + \frac{l^3 \sin \alpha}{3} + \frac{l^3 \sqrt{2} \sin \alpha}{3}. \end{aligned}$$

$$\iint_{\Sigma} y d\sigma = \iint_T 0 du dv + \iint_T u \sin \alpha du dv + \iint_D v du dv + \iint_D v \sqrt{2} du dv =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_T u \sin \alpha \, du \, dv + \iint_{\Delta} \varrho \sin \vartheta \varrho \, d\varrho \, d\vartheta + \iint_{\Delta} \varrho \sin \vartheta \sqrt{2} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta = \\
&= \int_0^l \left(\int_0^{-u+l} u \sin \alpha \, dv \right) du + \int_0^\alpha \left(\int_0^l \varrho^2 \sin \vartheta \, d\varrho \right) d\vartheta + \int_0^\alpha \left(\int_0^l \sqrt{2} \varrho^2 \sin \vartheta \, d\varrho \right) d\vartheta = \\
&= \frac{l^3 \sin \alpha}{6} + \frac{l^3 (1 - \cos \alpha)}{3} + \frac{l^3 \sqrt{2} (1 - \cos \alpha)}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} z \, d\sigma &= \iint_T v \, du \, dv + \iint_T v \cos \alpha \, du \, dv + \iint_D 0 \, du \, dv + \iint_D (l - \sqrt{u^2 + v^2}) \sqrt{2} \, du \, dv = \\
&= 2 \iint_T v \, du \, dv + \iint_{\Delta} (l - \varrho) \sqrt{2} \varrho \, d\varrho \, d\vartheta = \\
&= 2 \int_0^l \left(\int_0^{-u+l} v \, dv \right) du + \int_0^\alpha \left(\int_0^l (l - \varrho) \sqrt{2} \varrho \, d\varrho \right) d\vartheta = \frac{l^3}{3} + \frac{l^3 \sqrt{2} \alpha}{6}.
\end{aligned}$$

Si ricavano dunque le seguenti coordinate per il baricentro:

$$G = \left(\frac{l + l \cos \alpha + 2l \sin \alpha + 2l\sqrt{2} \sin \alpha}{3(2 + \alpha + \alpha\sqrt{2})}, \frac{l \sin \alpha + (2l + 2l\sqrt{2})(1 - \cos \alpha)}{3(2 + \alpha + \alpha\sqrt{2})}, \frac{2l + l\alpha\sqrt{2}}{3(2 + \alpha + \alpha\sqrt{2})} \right).$$

Questa volta, al tendere a 0 dell'angolo α , si ottiene esattamente il baricentro della singola lamina triangolare (in realtà si hanno fisicamente due lamine sovrapposte, ma questo non modifica la posizione del baricentro).