Studio di funzioni - Esercizi standard,1

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 18 gennaio 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x)=\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\,.$$

Soluzione

Poiché la funzione contiene, oltre a frazioni, anche radicali quadratici, il dominio naturale richiederà che il radicando sia maggiore o uguale a zero. Si trova facilmente

$$D=]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[\,.$$

La funzione risulta inoltre sempre non negativa nel suo dominio naturale[(1)], e si annulla solo per $x=-1$.

Come tutte le funzioni elementari essa è continua in tutto il suo dominio naturale. Una valutazione più attenta dovrà invece essere fatta sulla derivabilità, in quanto la funzione data ha tra le sue componenti la funzione *radice quadrata* che non è sempre derivabile.

Il calcolo dei limiti notevoli porge i seguenti risultati.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{\frac{x\left(1+{}^{1}\!/_{x}\right)}{x\left(1-{}^{1}\!/_{x}\right)}}=1\,;$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\left[\sqrt{\frac{2}{0^+}}\right]=+\infty\,.$$

Si noti che non abbiamo calcolato il limite per $x\to-1^-$, in quanto il punto $x=-1$ fa parte del dominio naturale, e questa funzione, come già osservato, risulta continua in tutto il suo dominio naturale.

Dal calcolo dei limiti notevoli si conclude che la retta $x=1$ è asintoto verticale, mentre la retta $y=1$ è asintoto orizzontale.

Passiamo al calcolo delle derivate prima e seconda e del loro segno.

[1] Ricordiamo che un radicale, quando ha senso nell'insieme dei numeri reali, non può essere negativo, ovvero che, qualunque sia $g(x)$, $\sqrt{g(x)}$ o non è definita, oppure è ≥ 0.

Si ha, per $x \neq -1$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \frac{1\cdot(x-1)-(x+1)\cdot 1}{(x-1)^2} = -\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\frac{1}{(x-1)^2}\,.$$

Questa derivata risulta sempre negativa, naturalmente per $x \neq -1$. Per controllare la derivabilità in corrispondenza di $x=-1$ la cosa più saggia sarebbe quella di procedere direttamente al calcolo del limite del rapporto incrementale, secondo la definizione di derivata. Tuttavia, poichè sappiamo che la funzione è continua in $x=-1$, possiamo procedere al calcolo del limite della derivata, per $x \to -1$, ottenendo facilmente

$$\lim_{x\to -1^-} f'(x) = -\infty\,.$$

Possiamo concludere che la funzione ha, per $x=-1$, derivata infinita e quindi tangente verticale[(2)]: questo implica che la funzione *non* è derivabile per $x=-1$.

Prima di procedere al calcolo della derivata seconda è opportuno semplificare l'espressione ottenuta per f'; si ottiene:

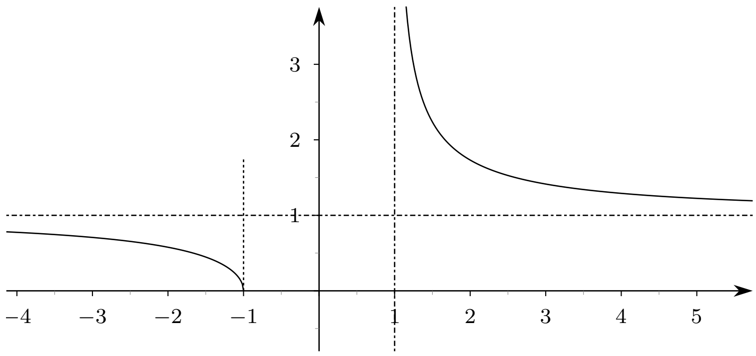
$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{(x+1)(x-1)^3}}\,.$$

Un calcolo standard produce allora

$$f''(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{(x+1)^3(x-1)^5}}\,,$$

da cui si conclude che la derivata seconda è positiva per $x > -1/2$ (e quindi $x>1$, tenendo conto del dominio), e negativa per $x < -1/2$ (e quindi $x < -1$, tenendo conto del dominio).

Il grafico è il seguente:



Si noti che abbiamo evidenziato la tangente verticale nel punto $(-1,0)$.

[2]Si tenga ben presente che

— se una funzione è continua in un punto x_0

— e se esiste (finito o infinito) il limite della derivata prima per $x \to x_0$,

si può concludere che la funzione ha, in x_0 derivata finita o infinita, uguale al limite prima ottenuto. Se, invece, il limite della derivata non esiste, *nulla* si può concludere circa l'esistenza o la non esistenza della derivata della funzione. Questo risultato è oggetto del teorema di Darboux.