Studio di funzioni - Esercizi standard, 3

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 19 febbraio 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = x + \frac{2}{x} - \ln x\,.$$

Soluzione

Per determinare il dominio naturale dobbiamo tenere conto della presenza della x al denominatore ($x \neq 0$), e del fatto che l'argomento di un logaritmo (in questo caso si tratta del logaritmo naturale, ma la cosa è valida per qualunque base di logaritmo), deve essere strettamente maggiore di zero. In conclusione

$$D =]0, +\infty[\,.$$

Lo studio del segno di f non è agevole a questo punto: questa situazione è abbastanza frequente, anzi in molti casi lo studio del grafico di una funzione serve proprio a determinarne, a posteriori, il segno.

Per quanto riguarda i limiti notevoli si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = [0 + \infty - (-\infty] = +\infty\,,$$

e

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = [+\infty + 0 - \infty]\,,$$

per cui si ottiene una forma di indecisione[1] del tipo "$\infty - \infty$". La risoluzione della forma di indecisione in questo caso è immediata se si tiene conto che x tende all'infinito "più rapidamente" di $\ln x$. In ogni caso, per chi non conosce gli ordini di infinito, si può procedere raccogliendo x:

$$\lim_{x\to +\infty} x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty\,,$$

in quanto è facile provare (per esempio con la regola di l'Hôpital) che ${}^{\ln x}/_{x}$ tende a 0, per x tendente a $+\infty$.

Si può intanto concludere che $x = 0$ è un asintoto verticale. Ricerchiamo gli asintoti obliqui:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} 1 + \frac{2}{x^2} - \frac{\ln x}{x} = 1$$

[1] Il nome ufficiale in questi casi è *forma indeterminata*, ma la nomenclatura non ci piace molto, in quanto non c'è nulla di indeterminato qui: l'unica cosa da osservare è che non si possono applicare direttamente i teoremi sui limiti, occorre mettere in atto strategie alternative.

e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} - \ln x = -\infty\,,$$

dunque non ci sono asintoti obliqui.

Per quanto riguarda le derivate si ottiene, facilmente,

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2}\,, \quad f''(x) = \frac{4}{x^3} + \frac{1}{x^2}\,.$$

La derivata prima è positiva per valori esterni a -1 e 2, ovvero, tenendo conto del dominio, per $x > 2$. La funzione f decresce in $]0, 2[$ e cresce in $]2, +\infty[$. Ha un minimo relativo (che è anche assoluto) per $x = 2$, di valore $f(2) = 3 - \ln 2$. La derivata seconda è, nel dominio, sempre positiva, dunque la funzione è sempre convessa.

Il riepilogo dei risultati via via ottenuti è contenuto nel grafico che segue.