Studio di funzioni - Esercizi standard, 4

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 28 febbraio 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x-2}{x}\,|x+1|\,.$$

Soluzione

Questa funzione contiene un valore assoluto: di norma conviene esaminare le diverse espressioni del valore assoluto, a seconda del segno del suo argomento, e ridurre la funzione a una funzione definita a tratti. In questo caso, avendosi

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{se} \quad x \geq -1 \\ -x-1, & \text{se} \quad x < -1 \end{cases},$$

la funzione si potrà riscrivere come segue[1]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-2)(x+1)}{x} = \dfrac{x^2-x-2}{x} = x-1-\dfrac{2}{x}, & \text{se} \quad x \geq -1 \\ \dfrac{(x-2)(-x-1)}{x} = \dfrac{-x^2+x+2}{x} = -x+1+\dfrac{2}{x}, & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}.$$

Tuttavia non è affatto detto che la scrittura "spezzata" della funzione sia sempre la più conveniente. Per esempio per la determinazione del dominio naturale è perfettamente inutile, in quanto basta osservare che l'unica difficoltà è originata dalla presenza del denominatore della frazione: si avrà dunque

$$D = \mathbb{R} \setminus 0\,.$$

Anche la determinazione del segno è più facile se non si spezza il valore assoluto: infatti il segno della frazione $(x-2)/x$ è immediato, mentre il fattore $|x+1|$ è strettamente positivo per $x \neq -1$, e si annulla per $x = -1$. Se ne conclude che

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \text{se} \quad x \in]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]2, +\infty[\\ f(x) = 0, & \text{se} \quad x \in \{-1, 2\} \\ f(x) < 0, & \text{se} \quad x \in]0, 2[\end{cases}.$$

[1] Si tenga ben presente che quando si incontrano funzioni definite a tratti non si deve pensare a due o più funzioni diverse, ma a una *unica* funzione, la cui espressione analitica risulta diversa a seconda del valore della variabile x: del resto nella definizione di funzione non è affatto richiesto che la legge che permette di ottenere i valori di $f(x)$ a partire da quelli di x sia la stessa per tutti gli x del dominio, anzi, non è nemmeno richiesto che la legge sia esprimibile in termini analitici mediante operazioni elementari.

Dunque, come regola generale, in presenza di valori assoluti è consigliabile spezzare la funzione, senza dimenticare che in molte circostanze durante la risoluzione conviene fare riferimento alla definizione originale.

Anche le modificazioni nella scrittura che abbiamo utilizzato più sopra (esecuzione dei prodotti e riduzione di una frazione a somma di più addendi) possono facilitare i calcoli in alcune circostanze (come vedremo è questo il caso per il calcolo delle derivate e dei limiti), ma possono complicarli in altri: prestare sempre la massima attenzione per evitare inutili dispendi di energie.

Per quanto riguarda i limiti notevoli si ha quanto segue.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -x+1+\frac{2}{x} = +\infty\,;$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} x-1-\frac{2}{x} = +\infty\,;$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x-1-\frac{2}{x} = -\infty\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x-1-\frac{2}{x} = +\infty\,.$$

Da qui possiamo intanto dedurre che $x=0$ è asintoto verticale e che non ci sono asintoti orizzontali. Ricerchiamo gli eventuali asintoti obliqui.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2} = -1\,;$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)-(-1)x = \lim_{x\to-\infty} -x+1+\frac{2}{x}+x = 1\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2} = 1\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(1)x = \lim_{x\to+\infty} x-1-\frac{2}{x}-x = -1\,.$$

Se ne deduce che le rette

$$y=-x+1 \quad \text{e} \quad y=x-1$$

sono asintoti obliqui, rispettivamente a $-\infty$ e a $+\infty$.

Procediamo a calcolare le derivate prima e seconda e a determinarne il segno.

$$f'(x) = \begin{cases} -1-\dfrac{2}{x^2}, & \text{se} \quad x<-1 \\ 1+\dfrac{2}{x^2}, & \text{se} \quad x>-1 \end{cases}\,,$$

da cui si vede facilmente che la derivata è negativa per gli $x<-1$, positiva per gli $x>-1$. Per quanto riguarda il valore $x=-1$ calcoliamo intanto i limiti, rispettivamente sinistro e destro, delle due espressioni sopra trovate per la derivata prima, ottenendo

$$\lim_{x\to-1^-} f'(x) = \lim_{x\to-1^-} -1-\frac{2}{x^2} = -3\,, \qquad \lim_{x\to-1^+} f'(x) = \lim_{x\to-1^+} 1+\frac{2}{x^2} = 3\ :$$

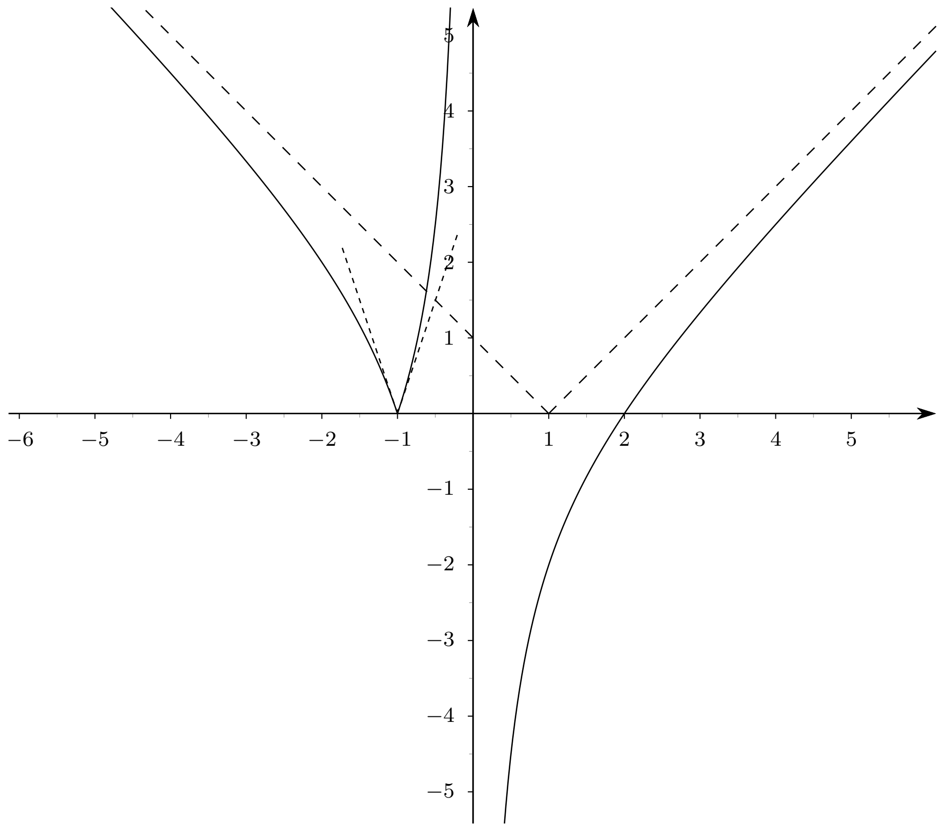
da qui deduciamo che la funzione non è derivabile in -1 e che presenta ivi un punto angoloso. Si tenga ben presente, come abbiamo osservato in altro esercizio, che la tecnica di calcolare il limite della derivata funziona *solo* per funzioni continue e *solo* in caso che il limite stesso esista finito (nel qual caso la funzione è derivabile) oppure nel caso che i limiti sinistro e destro siano finiti ma diversi, oppure uno finito e l'altro infinito oppure entrambi infiniti (nei quali casi si conclude che ci sono punti angolosi o cuspidi di vario tipo): se il limite della derivata non esiste per altri motivi (esempio funzioni oscillanti), nulla si può concludere circa la derivabilità della funzione, e occorre calcolare direttamente il limite del rapporto incrementale.

Si ha poi

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^3}, & \text{se} \quad x < -1 \\ -\dfrac{4}{x^3}, & \text{se} \quad x > -1 \end{cases} .$$

Questa derivata seconda è positiva solo per $-1 < x < 0$, altrimenti è negativa (naturalmente escluso $x = 0$, dove la funzione non è definita, e $x = -1$, dove non c'è la derivata prima e quindi non può esserci la derivata seconda).

Tenendo conto di tutto quanto abbiamo ottenuto possiamo tracciare il seguente grafico indicativo[2]



Nel punto $(-1, 0)$ abbiamo anche tracciato le due tangenti sinistra e destra, di coefficiente angolare -3 e 3, per evidenziare il punto angoloso.

[2]Non ci stancheremo mai di ripetere che conviene riportare sul grafico i risultati *man mano* che si procede: qui non lo abbiamo fatto solo per ovvi motivi tipografici.