Studio di funzioni - Esercizi standard, 2

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 15 febbraio 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x^3 + 1}\,,$$

limitando l'indagine alla derivata prima.

Soluzione

La funzione non contiene nessuna operazione[(1)] che possa portare limitazioni al dominio naturale, che dunque coincide con l'insieme di tutti i numeri reali. Per questo tipo di funzioni il fatto che il dominio naturale sia tutto $\mathbb{R}$ esclude la presenza di asintoti verticali.

I segni della funzione sono facilmente determinabili come segno del prodotto tra x e $\sqrt[3]{x^3+1}$. Nessun problema per il primo fattore; per il secondo si ha

$$\sqrt[3]{x^3+1} > 0 \Leftrightarrow x^3 + 1 > 0 \Leftrightarrow x^3 > -1 \Leftrightarrow x > -1.$$

Se ne deduce che

$$f(x) > 0 \quad \text{in} \quad]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[, \quad f(x) < 0 \quad \text{in} \quad]-1, 0[, \quad f(-1) = f(0) = 0\,.$$

Per i limiti notevoli si ottiene, facilmente,

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \cdot (-\infty) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty\,.$$

[1] Abitualmente la funzione *radice cubica* (e analogamente tutte le radici di indice naturale dispari) si ritiene definita su tutto $\mathbb{R}$, quindi anche per $x < 0$, anche se non tutti concordano su questo. In effetti ci sono alcuni problemi nell'uso delle proprietà dei radicali quando si maneggiano numeri negativi. Valga per tutti il seguente esempio: mentre si ha $\sqrt[6]{(-1)^2} = 1$, *non* è consentita la semplificazione dell'indice della radice con l'esponente del radicando, che porterebbe al calcolo di $\sqrt[3]{-1}$ che ha come risultato -1 e non 1. Questo fatto è abbastanza sconcertante in quanto se si vuole che

$$\sqrt[m]{x^n} = x^{n/m}\,,$$

essendo $1/3 = 2/6$, si dovrebbe avere

$$1 = \sqrt[6]{(-1)^2} = (-1)^{2/6} = (-1)^{1/3} = \sqrt[3]{(-1)} = -1\,,$$

cosa chiaramente impossibile. Si possono verificare queste difficoltà anche nei più comuni software di calcolo simbolico (Mathematica, Matlab, Derive, Geogebra, ...).

In ogni caso, se si evita di usare le proprietà dei radicali, si può ritenere, come noi faremo e come è d'uso, la radice cubica definita su tutto $\mathbb{R}$.

Questo esclude la presenza di asintoti orizzontali. Non esistono nemmeno asintoti obliqui in quanto si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt[3]{x^3+1}=\pm\infty.$$

Passiamo ora al calcolo della derivata prima[2]. Si ha:

$$f'(x)=\sqrt[3]{x^3+1}+x\,\frac{3x^2}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}=\frac{2x^3+1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}\,.$$

È molto importante rilevare che, mentre la funzione f è definita su tutto $\mathbb{R}$ ed è ivi continua (tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio naturale), essa può non essere derivabile: in effetti le funzioni radici fanno parte di quel gruppo di funzioni elementari che non sono sempre derivabili nel loro dominio naturale. In particolare la funzione $\sqrt[3]{x}$ non è derivabile in $x=0$ e quindi nulla si potrà dire riguardo la derivabilità della nostra funzione quando l'argomento della radice cubica vale 0, cioè quando $x=-1$. Per funzioni elementari come quelle oggetto del nostro studio questi problemi si presentano di solito in alcuni (pochi!) punti. In corrispondenza di *ciascuno* di questi punti ci si può comportare seguendo le indicazioni seguenti.

1. Se la funzione è continua nel punto, diciamolo c, si procede a calcolare la derivata, con le usuali regole, per gli altri punti.
2. Successivamente si calcola il limite (eventualmente separando il limite destro da quello sinistro) della derivata prima per x tendente a c.
3. Se il limite precedente esiste finito, allora la funzione è derivabile nel punto e la derivata coincide con il valore del limite.
4. Se il limite precedente non esiste o è infinito si possono presentare diverse situazioni e per controllare la derivabilità è meglio utilizzare direttamente la definizione (cioè fare il limite del rapporto incrementale). Nel caso particolare però che i limiti sinistro e destro esistano entrambi e siano finiti ma diversi, oppure uno finito e uno infinito, oppure entrambi infiniti (e questi sono i casi più comuni) si può concludere che la funzione non è derivabile e che si hanno punti angolosi o cuspidi o flessi a tangente verticale.

Nel nostro caso la funzione è continua e si ha

$$\lim_{x\to-1^{\pm}}\frac{2x^3+1}{\sqrt[3]{(x^3+1)^2}}=\left[\frac{-1}{0^+}\right]=-\infty\,.$$

Se ne deduce che la funzione non è derivabile[3] in -1 e ha, in corrispondenza di -1, un flesso a tangente verticale discendente.

Il calcolo del segno della derivata prima è immediato: il denominatore sempre positivo, mentre il numeratore è positivo per

$$x>-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\,.$$

In corrispondenza di questo punto la funzione avrà dunque un minimo relativo, che è anche minimo assoluto vista la continuità e i valori già trovati dei limiti all'infinito. L'ordinata del minimo (la

[2] Il testo chiede eplicitamente di limitare l'indagine alla derivata prima. Questo succede di solito quando i calcoli relativi alla derivata seconda sono troppo complessi. Occorre tener presente che lo studio dei segni della derivata prima fornisce già indicazioni molto dettagliate sull'andamento del grafico, anche se non consente di valutare l'eventuale presenza di flessi o i cambi di concavità.

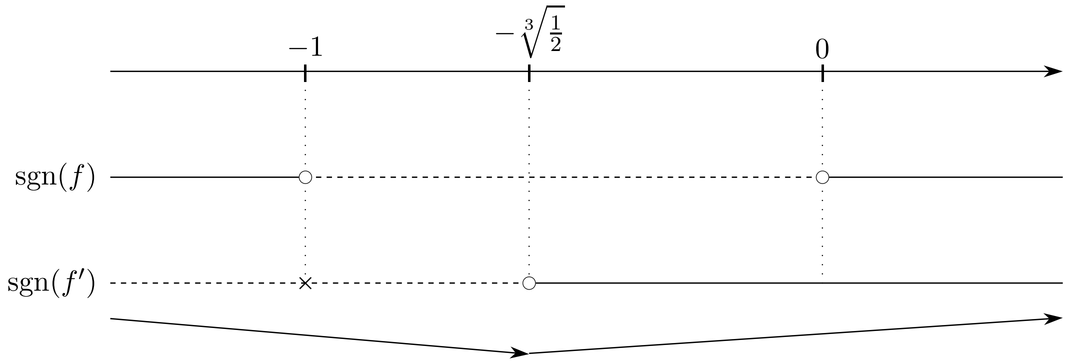
[3] *Attenzione*: il limite del rapporto incrementale in -1 è infinito, e alcuni testi parlano, in casi come questo, di derivata infinita (altri dicono che non esiste la derivata), ma in ogni caso *solo* quando il limite del rapporto incrementale è *finito* la funzione si dice derivabile.

"quota") si ottiene sostituendo nella funzione l'ascissa trovata. Si ottiene

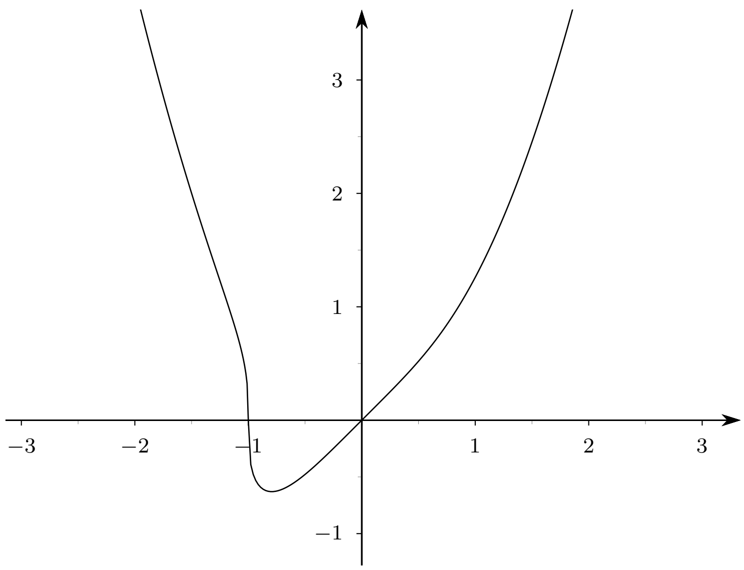
$$f\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\right)=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt[3]{-\frac{1}{2}+1}=-\sqrt[3]{\frac{1}{4}}\simeq-0.63\,.$$

La funzione non ha, ovviamente, massimo assoluto.

Il grafico che segue riporta il segno della funzione e della sua derivata.



I risultati trovati[4] consentono di tracciare il grafico che segue.



[4] In realtà il grafico è ottenuto al computer e quindi tiene anche conto degli intervalli ove la funzione è concava e ove è convessa, cosa che noi non abbiamo determinato.