Studio di funzioni - Esercizi standard, 5

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 1 marzo 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = x^3 \ln\left(x^\pi\right).$$

Soluzione

La funzione può essere riscritta, senza inserire alcuna condizione, nella forma

$$f(x) = \pi x^3 \ln x\,,$$

Il dominio naturale è

$$D =]0, +\infty[\,,$$

mentre il segno di f è

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \text{se} \quad x > 1 \\ f(x) = 0, & \text{se} \quad x = 1 \\ f(x) < 0, & \text{se} \quad 0 < x < 1 \end{cases}.$$

La funzione, come tutte le funzioni elementari, è continua nel suo dominio naturale e si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \pi \frac{\ln x}{1/x^3} \overset{(H)}{\Leftarrow} \lim_{x\to 0^+} \pi \frac{1/x}{-3/x^4} = \lim_{x\to 0^+} \pi \frac{-x^3}{3} = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,.$$

La funzione può essere prolungata per continuità in 0 ottenendo una nuova funzione $f_1(x)$ definita in $[0, +\infty[$ come segue

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se} \quad x > 0 \\ 0, & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

e ovunque continua. I limiti precedenti mostrano che non ci sono asintoti verticali o orizzontali. Un calcolo immediato mostra che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty\,,$$

per cui non esistono asintoti obliqui.

Procediamo a calcolare le derivate, intanto di f, e poi del suo prolungamento f_1.

$$f'(x) = \pi x^2\big(1 + 3\ln x\big)\,, \quad f''(x) = \pi x\big(5 + 6\ln x\big)\,.$$

Si ha poi, con una semplice applicazione della regola di l'Hôpital o applicando i limiti notevoli,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0\,, \quad \lim_{x\to 0^+} f''(x) = 0\,.$$

Le note proprietà del teorema sul limite della derivata ci permettono di concludere che la funzione prolungata f_1 ha derivate prima e seconda nulle nell'origine.

Per quanto riguarda il segno delle derivate, tenendo conto che la x non può essere negativa si conclude che

$$\begin{cases} f'(x) > 0, & \text{se} \quad x > \dfrac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}} \\ f'(x) = 0, & \text{se} \quad x = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}} \\ f'(x) < 0, & \text{se} \quad 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt[3]{\mathrm{e}}} \end{cases}, \qquad \begin{cases} f''(x) > 0, & \text{se} \quad x > \dfrac{1}{\sqrt[6]{\mathrm{e}^5}} \\ f''(x) = 0, & \text{se} \quad x = \dfrac{1}{\sqrt[6]{\mathrm{e}^5}} \\ f''(x) < 0, & \text{se} \quad 0 < x < \dfrac{1}{\sqrt[6]{\mathrm{e}^5}} \end{cases}$$

Dunque

— f ha un minimo relativo e assoluto in corrispondenza di $x = 1/\sqrt[3]{\mathrm{e}}$, di valore $-\pi/3\mathrm{e}$

— f non ha massimo assoluto, mentre $\sup(f) = +\infty$;

— f_1 ha un massimo relativo in $x = 0$, di valore 0;

— f ha un flesso a tangente obliqua in corrispondenza di $x = 1/\sqrt[6]{\mathrm{e}^5}$.

Il grafico che segue riassume i risultati trovati.