Studio di funzioni - Esercizi di avvio, 1

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 18 gennaio 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x.$$

Soluzione

La funzione ha come *dominio naturale* tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, cosa che succede per tutte le *funzioni polinomiali*. Ricordiamo che il dominio naturale di una funzione elementare è il massimo sottoinsieme di $\mathbb{R}$ nel quale hanno senso le operazioni indicate per ottenere il valore di $f(x)$ a partire da x. Occorre tenere presente comunque che in molti esercizi potrebbe essere assegnato direttamente un dominio nel testo, ovviamente più piccolo del dominio naturale: in questi casi la funzione va studiata nell'insieme assegnato.

Le funzioni polinomiali sono anche sempre continue e derivabili (quante volte si vuole) in tutto $\mathbb{R}$ e quindi non ci dovremo preoccupare di questi problemi di regolarità.

La determinazione del segno (insiemi di positività e negatività, nonché insieme degli zeri, ovvero delle intersezioni del grafico con l'asse delle ascisse) è agevole solo per i polinomi di primo e secondo grado, mentre per polinomi di grado più elevato richiede la scomposizione del polinomio stesso in fattori, con una delle regole studiate. In questo caso la cosa è particolarmente semplice, e si ottiene

$$f(x) = x(x^2 - 3x + 2)\,.$$

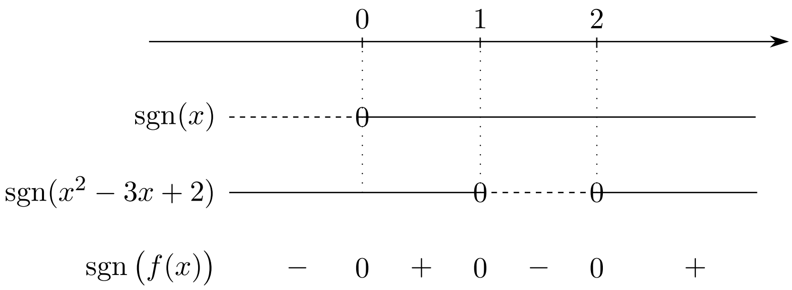
Il primo fattore si annulla per $x = 0$, è positivo per $x > 0$, negativo per $x > 0$. Il secondo fattore si annulla (formula risolutiva delle equazioni di secondo grado!) per

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = \frac{3 \pm 1}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{array} \right. ,$$

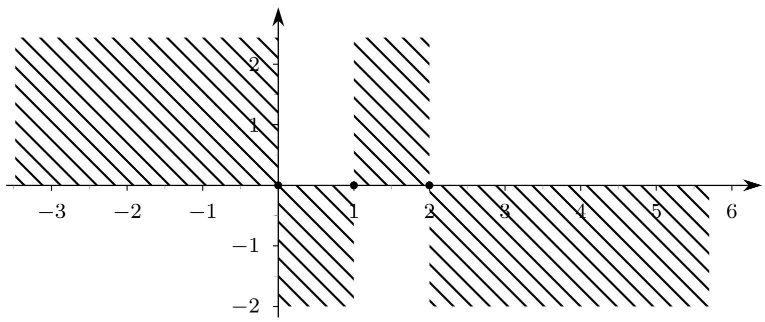
mentre è positivo per valori esterni e negativo per valori interni alle radici. Si può dunque tracciare il seguente "grafico di segno",[1] ove abbiamo usato la scrittura "sgn(·)" per indicare il segno della quantità racchiusa tra parentesi, e la convenzione di indicare rispettivamente con tratto continuo e

[1] È ovvio che in un caso come questo si sarebbe potuto anche procedere "a vista", senza bisogno di grafici: è comunque opportuno seguire sempre la strada maestra, ed evitare scorciatoie che abbreviano il percorso solo in apparenza. Segnaliamo anche che gli zeri del secondo fattore (2 e 1) si sarebbero potuti trovare anche senza l'uso della formula risolutiva delle equazioni di secondo grado, osservando che la somma degli zeri deve essere 3 e il prodotto 2: ancora una volta, se non si è certi della correttezza di una strategia, è meglio seguire la via standard, piuttosto che prendere inutili cantonate.

tratteggio gli insiemi di positività e di negatività dei diversi fattori, con uno 0 i punti dove le varie quantità si annullano, con il + e il - i domini di positività e negatività del prodotto dei due fattori, cioè della funzione data.



La determinazione del segno della funzione consente di affermare subito che il grafico che dobbiamo tracciare potrà trovarsi solo nelle regioni non tratteggiate della figura che segue, mentre la curva grafico intersecherà l'asse delle ascisse nei punti di ascissa 0, 1, 2.



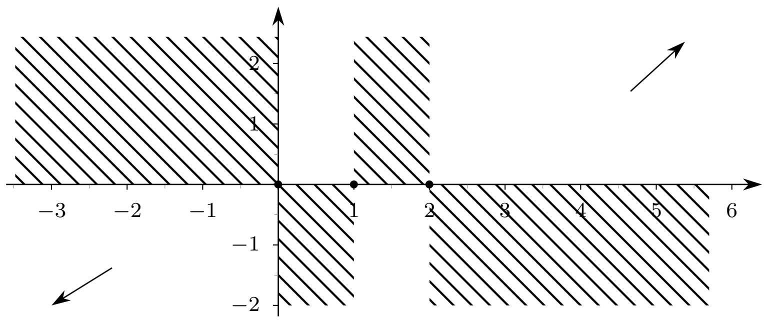
Segnaliamo che è opportuno, nello studio di funzione, riportare subito nel diagramma cartesiano i risultati che si ottengono via via: questo fatto può essere di grande aiuto nello sviluppo dell'esercizio e consente spesso di evitare grossolani errori.

Una delle cose comunemente richieste in problemi di questo tipo è la determinazione dell'eventuale intersezione del grafico con l'asse delle ordinate, cosa che si fa agevolmente calcolando $f(0)$ (nell'ipotesi che 0 appartenga al dominio della funzione!). In questo caso si ottiene $f(0) = 0$, cosa che del resto era già nota dalle considerazioni precedenti.

La ricerca dei *limiti notevoli* può limitarsi, in un caso come questo, ai casi $x \to \pm\infty$, vista la continuità della funzione su tutto $\mathbb{R}$. Si trova facilmente

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = \pm\infty\,.$$

Anche questi risultati vanno riportati subito nel grafico che stiamo costruendo:

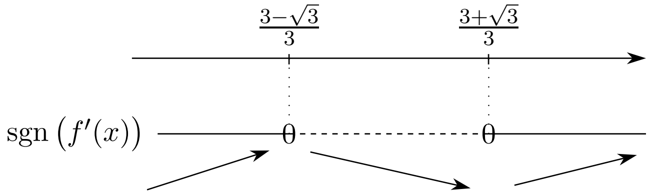


La funzione non presenta asintoti: per i verticali e orizzontali la cosa è ovvia, per quelli obliqui basta solo osservare che i limiti, a $\pm\infty$, di ${}^{f(x)}/_{x}$ sono infiniti.

A questo punto possiamo passare al calcolo della derivata prima e del suo segno, ottenendo quanto segue.

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 2\,.$$

$$f'(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = \frac{6 \pm \sqrt{36-24}}{2 \times 3} = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3}\,.$$



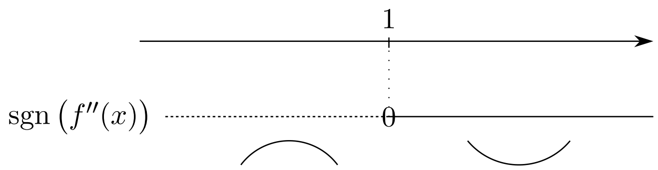
Dunque la funzione risulterà crescente per $x < {}^{(3-\sqrt{3})}/_{3}$ e per $x > {}^{(3+\sqrt{3})}/_{3}$, mentre risulterà decrescente per $< {}^{(3-\sqrt{3})}/_{3} < x < {}^{(3+\sqrt{3})}/_{3}$. Avrà un punto di massimo relativo in $x = {}^{(3-\sqrt{3})}/_{3}$, un punto di minimo relativo in $x = {}^{(3+\sqrt{3})}/_{3}$. Poiché ha limiti $\pm\infty$ all'infinito, non avrà né massimo né minimo assoluto. Le ordinate dei punti di massimo e minimo relativo (cioè i valori del massimo e minimo relativo) sono, rispettivamente:

$$f\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right) \simeq 0.385 \quad \text{e} \quad f\left(\frac{3+\sqrt{3}}{3}\right) \simeq -0.385\,.$$

Osserviamo che abbiamo approssimato i valori del massimo e del minimo relativo, per facilitare la costruzione del grafico: in un tema, salvo quando esplicitamente indicato, è di solito opportuno non eseguire approssimazioni nei calcoli.

Possiamo ora procedere al calcolo della derivata seconda e del suo segno.

$$f''(x) = 6x - 6, f''(x) = 0 \quad \text{per} \quad x = 1,\ f''(x) > 0 \quad \text{per} \quad x > 1,\ f''(x) < 0 \quad \text{per} \quad x < 1\ :$$



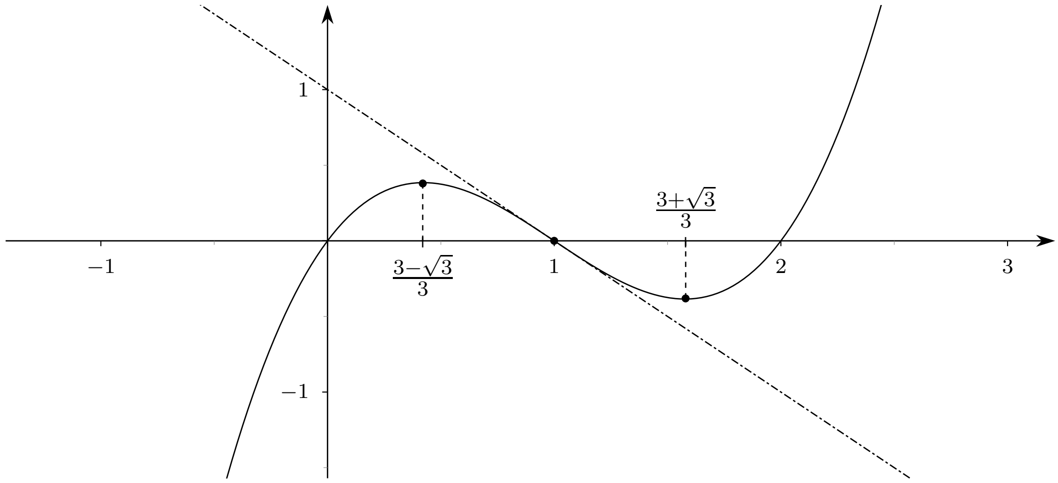
La funzione ha un punto di flesso in corrispondenza di $x = 1$, con ordinata $f(1) = 0$; gli intervalli di concavità e convessità sono inoltre rappresentati chiaramente nella figura qui sopra. La tangente al grafico nel punto $(1, 0)$ (tangente *inflessionale*) ha coefficiente angolare $f'(1) = -1$, e dunque equazione

$$y - f(1) = f'(1)(x-1)\,, \quad \text{ovvero} \quad y = -x + 1\,.$$

Non sempre è richiesto di determinare le equazioni delle tangenti inflessionali. In ogni caso la loro rappresentazione grafica può rendere molto più accurato il tacciamento del grafico della funzione.

Nella risoluzione di questo esercizio abbiamo costruito tre grafici di segno diversi, uno per f, uno per f', uno per f''. Nella pratica è spesso conveniente riportare tutti i risultati in un unico grafico, che tenga conto anche del dominio della funzione (cosa che in questo problema era irrilevante, visto che il dominio stesso è tutto l'insieme $\mathbb{R}$). In generale questa strategia consente di evitare errori, soprattutto in casi complessi, come vedremo in qualche successivo esempio.

Tenendo conto di tutti i risultati trovati possiamo procedere a tracciare il grafico richiesto.



Si noti che il grafico risulta simmetrico rispetto al punto di flesso: è questa una proprietà standard delle funzioni polinomiali di terzo grado, come questa. Di seguito ne proponiamo una possibile dimostrazione, come utile ripasso per chi conosce le formule per la traslazione degli assi cartesiani.

Dato un sistema cartesiano Oxy e un punto $O' = (\alpha, \beta)$, le formule per la traslazione degli assi nel sistema $O'XY$, sono le seguenti:

$$\begin{cases} X = x - \alpha \\ Y = y - \beta \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = X + \alpha \\ y = Y + \beta \end{cases},$$

di cui ovviamente le seconde sono le inverse delle prime. Le prime si usano per ottenere le "*nuove coordinate*" dei punti a partire dalle "*vecchie*", le seconde per ottenere le "*nuove equazioni*" delle curve a partire dalle "*vecchie*".

Supponiamo ora di avere la curva grafico di una funzione polinomiale di terzo grado,

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Per determinare il punto di flesso calcoliamo la derivata seconda di f:

$$f''(x) = 6ax + 2b\,.$$

Essa si annulla in corrispondenza di $-b/3a$ (ovviamente $a \neq 0$, altrimenti non avrei una cubica) e dunque il punto

$$F\left(-\frac{b}{3a}, -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^2}{9a} - \frac{bc}{3a} + d\right)$$

è il punto di flesso.

Eseguiamo ora una traslazione di assi che porti l'origine in F, usando le formule precedentemente ricordate, dove si ha

$$\alpha = -\frac{b}{3a}\,, \quad \beta = -\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^2}{9a} - \frac{bc}{3a} + d.$$

Si ottiene:

$$Y + \left(-\frac{b^3}{27a^2} + \frac{b^2}{9a} - \frac{bc}{3a} + d\right) = a\left(X - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(X - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(X - \frac{b}{3a}\right) + d$$

Eseguendo i calcoli indicati e semplificando si ottiene la seguente espressione per la stessa curva nel sistema con origine in F:

$$Y = g(X) = aX^3 + \left(c - \frac{b^2}{3a}\right)X\,.$$

Come si vede la funzione g contiene ora solo potenze dispari, per cui risulta simmetrica rispetto all'origine, cioè rispetto al punto di flesso del grafico del grafico della funzione F.