Studio di funzioni - Esercizi di avvio, 3

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 18 gennaio 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x}\,.$$

Soluzione

Si tratta di una funzione razionale fratta (quoziente di due polinomi). Il dominio naturale è dato dall'insieme dei numeri reali con l'esclusione di quelli che annullano il denominatore, in questo caso $x = 0$. Dunque

$$D =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[.$$

La funzione, come tutte le funzioni elementari, è continua in tutto il suo dominio naturale. Essa è anche derivabile (quante volte si vuole) in tutto il dominio naturale(1).

La funzione non ha ovviamente intersezioni con l'asse delle y ($x = 0$ è un punto escluso dal dominio); non ha nemmeno intersezioni con l'asse delle ascisse, in quanto il numeratore della frazione risulta sempre diverso da zero. Come si verifica banalmente, è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$.

Per quanto riguarda i limiti notevoli si ha quanto segue(2).

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to-\infty} x + \frac{1}{x} = -\infty\,;$$

$$\lim_{x\to0-} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0^-}\right] = -\infty\,;$$

$$\lim_{x\to0+} \frac{x^2+1}{x} = \left[\frac{1}{0^+}\right] = +\infty\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x} = \lim_{x\to+\infty} x + \frac{1}{x} = +\infty\,.$$

[1] È opportuno ricordare che tutte le funzioni elementari sono continue nel loro dominio naturale, mentre non sempre sono derivabili. Un esempio importante di funzione elementare continua (addirittura su tutto $\mathbb{R}$), ma non derivabile nell'origine è la funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2} = |x|\,.$$

[2] Segnaliamo che è quasi sempre opportuno, nel calcolare il limite per $x \to c$, $c \in \mathbb{R}$, separare il calcolo del limite destro da quello del limite sinistro. Nel calcolo dei limiti inoltre è uso comune utilizzare le regole di calcolo "sulla retta reale estesa", dove sono anche possibili, per esempio, divisioni per zero (se il numeratore è diverso da zero!): per segnalare che le operazioni sono eseguite sulla retta reale estesa, racchiuderemo i calcoli tra parentesi quadre, come è tradizione.

I risultati ottenuti sui limiti consentono di affermare che la retta $x = 0$ è asintoto verticale, e che non esistono asintoti orizzontali. Rimane aperto il problema della ricerca di eventuali asintoti obliqui, per i quali occorre calcolare i

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

e, se almeno uno di essi vale m (finito e non nullo), anche i limiti

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - mx\,.$$

Nel caso delle funzioni razionali fratte, comunque, la ricerca degli eventuali asintoti orizzontali e/o obliqui è facilitata dalle seguenti considerazioni.

Sia

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}\,,$$

e indichiamo con $\deg(N)$, e $\deg(D)$ il grado del polinomio al numeratore e denominatore rispettivamente. Allora:

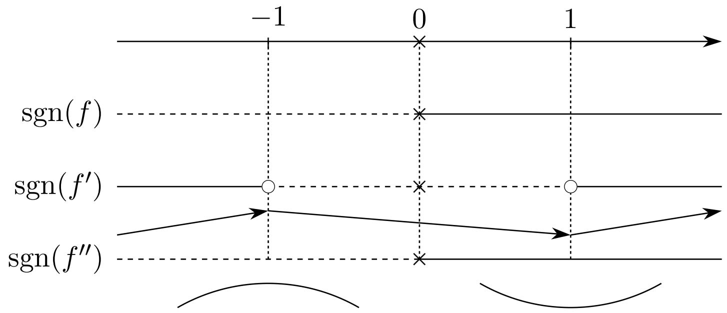
1. se $\deg(N) < \deg(D)$, la retta $y = 0$ (asse delle ascisse) è asintoto orizzontale;
2. se $\deg(N) \geq \deg(D)$ si esegue la divisione del numeratore per il denominatore, ottenendo come *quoziente* (non ci interessa qui il resto della divisione):
   a) una costante k, se $\deg(N) = \deg(D)$: la retta $y = k$ è asintoto orizzontale;
   b) un polinomio di primo grado $mx + q$, se $\deg(N) = \deg(D) + 1$: la retta $y = mx + q$ è asintoto obliquo;
   c) un polinomio di grado ≥ 2, se $\deg(N) > \deg(D) + 1$: non esistono asintoti orizzontali od obliqui (il polinomio quoziente è detto in questo caso una "curva asintotica").

Per quanto riguarda gli eventuali asintoti verticali di funzioni razionali fratte, si tenga presente che essi si presentano solo in corrispondenza agli zeri del denominatore, *purché contemporaneamente non si annulli anche il numeratore*, nel qual caso occorrerà uno studio più accurato, come si può vedere in altri esempi.

Possiamo passare al calcolo delle derivate prima e seconda (come già segnalato, per funzioni di questo tipo non esistono problemi di derivabilità nel dominio naturale). Si ha

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x} \quad , \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}\,.$$

La ricerca del segno di queste due derivate non presenta problema alcuno. Riportiamo in un grafico cumulativo, che conviene costruire man mano che procede lo studio, il dominio della funzione e i segni della funzione stessa e delle derivate prima e seconda.



Notiamo che sulla prima linea abbiamo segnato (con una $\times$) che il punto $x = 0$ è escluso dal dominio; naturalmente in corrispondenza a questo punto non si possono calcolare né il segno della funzione, né le derivate (possiamo dire, con un linguaggio un po' semplificato, ma significativo) che una $\times$ in una linea si "ripercuote" in tutte le linee sottostanti.

Possiamo concludere che la funzione presenta un punto di massimo relativo per $x = -1$, di minimo relativo per $x = 1$, con ordinate rispettive -2 e 2; non presenta invece alcun punto di flesso.

I risultati trovati possono essere riassunti nel grafico che segue.