Studio di funzioni - Esercizi di avvio, 4

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 18 gennaio 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}\,.$$

Soluzione

Si tratta di una funzione razionale fratta (quoziente di due polinomi) il cui dominio naturale è dato dall'insieme dei reali esclusi i punti che annullano il denominatore. In questo caso dunque

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[\,.$$

Per controllare le eventuali simmetrie canoniche (cioè rispetto all'asse y o all'origine) calcoliamo $f(-x)$; si ha

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\frac{x^3}{x^2 - 4} = -f(x)\,.$$

Dunque la funzione è simmetrica rispetto all'origine, ovvero è una funzione *dispari*. Si noti che la funzione è dispari anche se contiene sia potenze pari che potenze dispari. In effetti *solo* ed *esclusivamente* per i polinomi vale la regola che un polinomio che contiene solo potenze pari è una funzione pari[1], un polinomio che contiene solo potenze dispari è una funzione dispari: la funzione in questione non è un polinomio e dunque la regola non è applicabile. Si può a questo punto limitare lo studio solo alle $x \geq 0$, e poi ragionare per simmetria.

Per quanto riguarda il segno, la funzione si annulla solo per $x = 0$, è negativa in $]0, 2[$, positiva in $]2, +\infty[$.

Per quanto riguarda i limiti notevoli si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{x^2\left(1 - \dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1 - \dfrac{4}{x^2}} = +\infty\,;$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = \left[\frac{8}{0^-}\right] = -\infty;$$

$$\lim_{x\to2^+} f(x) = \left[\frac{8}{0^+}\right] = +\infty.$$

[1] Si tenga presente che l'eventuale *termine noto* del polinomio corrisponde alla potenza x^0, cioè è una potenza pari.

Dunque la retta $x = 2$ è asintoto verticale, e non esistono asintoti orizzontali. Per quanto riguarda gli asintoti obliqui, essendo $\deg(N) = \deg(D) + 1$, si ha sicuramente un asintoto obliquo che si ottiene dividendo il numeratore per il denominatore.

$$\frac{x^3}{x^2-4} = x + \frac{4x}{x^2-4} \ :$$

La retta $y = x$ è asintoto obliquo.

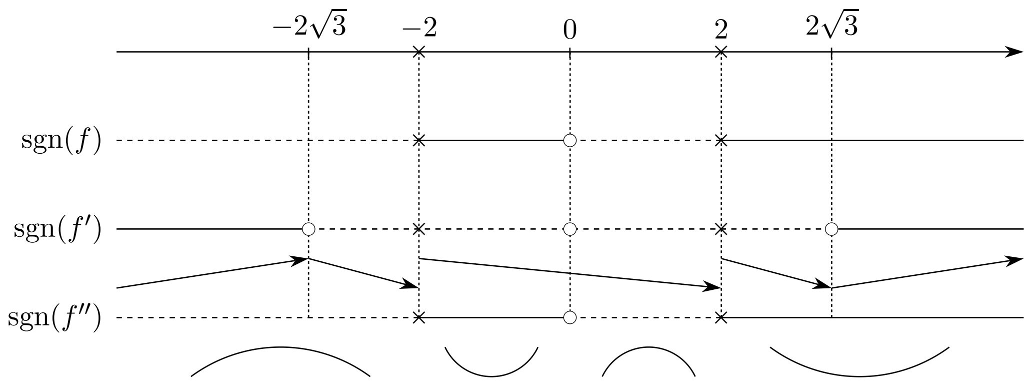
Passiamo ora al calcolo delle derivate prima e seconda.

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \cdots = \frac{x^4 - 12x^2}{x^2-4)^2} = \frac{x^2(x^2-12)}{x^2-4)^2} \, ;$$

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 24x^2)(x^2-4)^2 - (x^4 - 12x^2)2(x^2-4)2x}{(x^2-4)^4} = \cdots = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} \, .$$

Si presti particolare attenzione al calcolo della derivata seconda di una funzione razionale fratta: poiché la derivata prima contiene (salvo semplificazioni) un quadrato, *non* conviene svolgere questo quadrato per fare la derivata seconda: come mostra il calcolo appena eseguito, questo consente di norma un raccoglimento a fattor comune e una semplificazione che può essere cruciale per la determinazione del segno della derivata seconda.

Le espressioni ottenute per la derivata prima e seconda consentono una facile determinazione del relativo segno; riportiamo solo i risultati nel solito grafico, in cui abbiamo considerato tutti i reali, sfruttando la già citata simmetria.



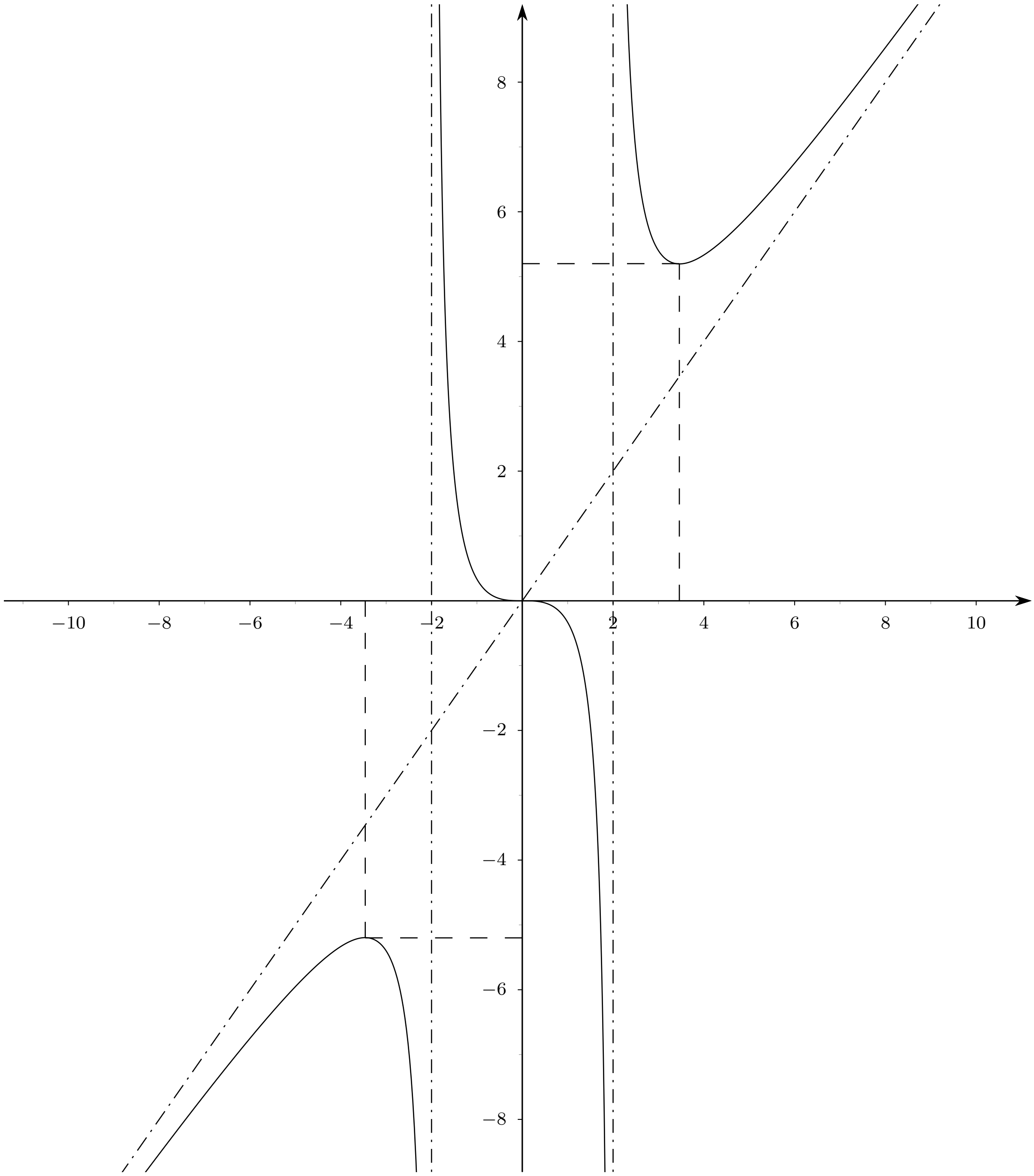
Si noti che, in corrispondenza di $x = 0$, si annullano (oltre alla funzione) sia la derivata prima che la derivata seconda; poiché la funzione risulta decrescente sia a sinistra cha a destra di $x = 0$, mentre la derivata seconda cambia di segno, il punto $x = 0$ è di flesso a tangente orizzontale. Non esistono altri punti di flesso; i punti $x = -2\sqrt{3}$ e $x = 2\sqrt{3}$ sono di massimo e minimo relativo rispettivamente, con ordinate

$$f(-2\sqrt{3}) = -3\sqrt{3} \quad \text{e} \quad f(2\sqrt{3}) = 3\sqrt{3} \, .$$

Si noti, come è ben lecito, che l'ordinata del massimo relativo è più piccola di quella del minimo relativo. La funzione non ha massimo né minimo assoluto.

Possiamo ora raccogliere tutti i risultati via via ottenuti per tracciare una grafico indicativo dell'andamento della funzione[2].

[2]Come più volte segnalato è opportuno costruire sia il digramma dei segni che il grafico della funzione in un sistema cartesiano ortonormale *progressivamente*, man mano che si procede con i calcoli, senza aspettare di concludere tutto l'esame analitico; in questo modo è di solito più facile scoprire eventuali errori.



Si noti come, avendo usato unità di misura diverse per i due assi, la retta $y = x$ (bisettrice del primo e terzo quadrante) non sia in effetti geometricamente la bisettrice.