Studio di funzioni - Esercizi di avvio, 2

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 18 gennaio 2011

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = x^3 - 3x + 6.$$

Soluzione

La funzione ha come dominio naturale tutto l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali ed è inoltre ivi continua e derivabile (quante volte si vuole, come ogni funzione polinomiale).

La cosa più complessa in questo caso è la determinazione del segno, in quanto il polinomio di terzo grado $x^3 - 3x + 6$ non è scomponibile con metodi elementari: non si può applicare nessuna delle tecniche usuali per la scomposizione, e in particolare non si può scomporre "con Ruffini", in quanto il polinomio non ha radici razionali[(1)]. Torneremo sul problema del segno di questa funzione alla fine dell'esercizio: vogliamo prima mostrare come si possa ugualmente procedere nello studio della funzione, anche senza questa informazione.

Osserviamo innanzitutto che $f(0) = 6$, ovvero che il grafico della funzione interseca l'asse delle ordinate nel punto $(0, 6)$.

Il calcolo dei limiti notevoli (solo a $\pm\infty$, per le già citate condizioni di regolarità della funzione) non presenta alcun problema:

$$\lim_{x\to\pm\infty} x^3 - 3x + 6 = \lim_{x\to\pm\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{6}{x^3}\right) = \pm\infty.$$

La funzione non presenta ovviamente asintoti verticali od orizzontali; per quanto riguarda quelli obliqui, si ha

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} x^2 - 3 + \frac{6}{x} = +\infty\,,$$

per cui non esistono nemmeno asintoti obliqui.

Per la derivata prima si ha

$$f'(x) = 3x^2 - 3\,,$$

[1]Ricordiamo che se un polinomio a coefficienti interi ha p/q come radice razionale, allora p divide il termine noto, mentre q divide il primo coefficiente, cioè quello con grado massimo. In questo caso le uniche razionali possibili sono

$$\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm6\,,$$

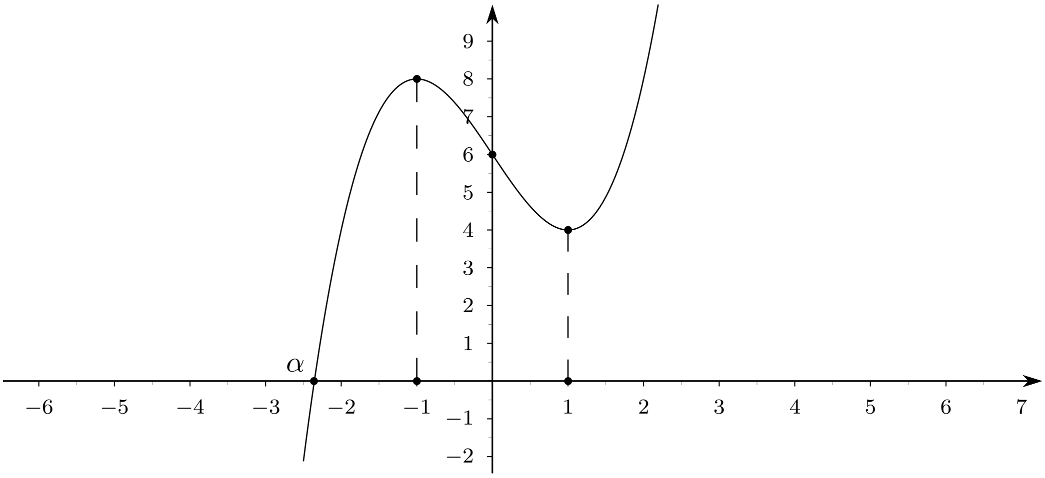
e si verifica facilmente che nessuno di questi numeri annulla il polinomio.

che si annulla per $x = \pm 1$, risulta positiva (funzione crescente) in $]-\infty, -1[$ e $]1, +\infty[$, negativa (funzione decrescente) in $[-1, 1]$. Dunque si ha un massimo per $x = -1$, di valore 8, e un minimo per $x = 1$, di valore 4.

Per la derivata seconda si ha

$$f''(x) = 6x\,,$$

che risulta positiva (concavità verso l'alto, o funzione convessa) per $x > 0$, negativa (concavità verso il basso, o funzione concava) per $x < 0$. Si ha un punto di flesso in $(0, 6)$. Come noto la funzione polinomiale di terzo grado è simmetrica rispetto a questo punto di flesso. Si può ora procedere a riportare su un grafico i risultati ottenuti[2]: si ottiene



Le considerazioni svolte rendono evidente che il polinomio $x^3 - 3x + 6$ si annulla una sola volta, per un valore, diciamolo α, di x sicuramente minore di 1, mentre risulta negativo per $x < \alpha$ e positivo per $x > \alpha$. Una stima più accurata del valore di α si può ottenere se si calcola, successivamente, $f(-2)$, $f(-3)$, ecc. Si ottiene:

$$f(-2) = 4\ (> 0), \quad f(-3) = -12\ (< 0)\,.$$

Questo ci permette di concludere che il valore di α è compreso tra -3 e -2, e ne abbiamo tenuto conto per ottenere un grafico il più accurato possibile.

Per chi conosce la formula risolutiva delle equazioni di terzo grado[3], segnaliamo che il valore di α è esattamente

$$\alpha = -\frac{1}{\sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}} - \sqrt[3]{3-2\sqrt{2}}\,.$$

Naturalmente un valore approssimato di α si può ottenere con opportuni metodi di calcolo numerico.

[2] Ricordiamo che sarebbe opportuno procedere a riportare con ordine i risultati sul grafico, man mano che si procede con il calcolo, senza aspettare di avere concluso tutti i punti indispensabili per lo studio

[3] Oltre alla nota formula risolutiva per le equazioni di secondo grado, ne esistono anche per quelle di terzo e quarto grado, solo che richiedono necessariamente l'uso dei numeri complessi. Non esistono invece formule risolutive per le equazioni di grado superiore al quarto.