Studio di funzioni - Esercizi di avvio, 5

Materiale prelevato da
http://www.batmath.it/esercizi/studiofunz/studiofunz.htm

Versione del 1 giugno 2010

Testo

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}\,.$$

Soluzione

Si tratta di una funzione razionale fratta (quoziente di due polinomi), il cui dominio naturale è dato dall'insieme dei reali esclusi i punti che annullano il denominatore. In questo caso dunque

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}\,.$$

Non esistono simmetrie "naturali" (cioè rispetto all'asse y o all'origine[1]).

Il segno della funzione è facilmente determinabile: il numeratore è strettamente positivo per $x \neq 1$, e si annulla in corrispondenza di $x = 1$; il denominatore è negativo per $x < -1$, nullo per $x = -1$ (dove la funzione risulta non definita, come già osservato), positivo per $x > -1$. Dunque

$$f(x) > 0 \text{ se } -1 < x < 1 \vee x > 1\,; \quad f(x) = 0 \text{ se } x = 1\,; \quad f(x) < 0 \text{ se } x < -1\,.$$

Per quanto riguarda i limiti notevoli si ha facilmente

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0\,,$$

in quanto il grado del numeratore è minore di quello del denominatore;

$$\lim_{x\to -1^\pm} f(x) = \left[\frac{1}{0^\pm}\right] = \pm\infty\,.$$

Dunque la retta $x = -1$ è asintoto verticale, l'asse delle x ($y = 0$) è asintoto orizzontale.

Passiamo al calcolo delle derivate prima e seconda.

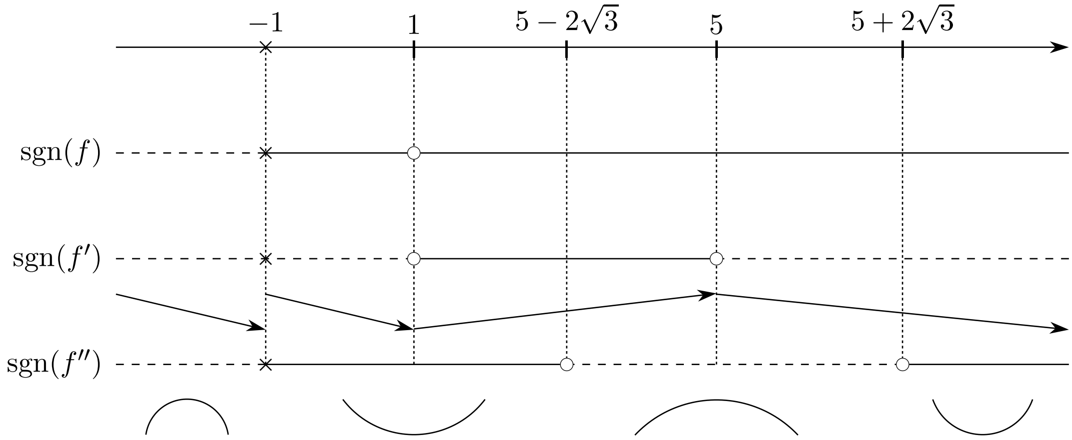
$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)^3 - (x-1)^2 3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \cdots = \frac{(x-1)(5-x)}{(x+1)^4} = \frac{-x^2+6x-5}{(x+1)^4}$$

[1] Si ricordi che *nessuna* funzione (di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$) può essere simmetrica rispetto all'asse delle ascisse, perché altrimenti a un valore di x corrisponderebbero due diversi y, cosa impossibile nelle funzioni "univoche" che sono oggetto del nostro studio.

$$f''(x) = \frac{(-2x+6)(x+1)^4 - (-x^2+6x-5)4(x+1)^3}{(x+1)^8} = \cdots = \frac{2(x^2-10x+13)}{(x+1)^5}\,.$$

Si noti l'importanza di *non* svolgere i calcoli delle potenze che compaiono al numeratore e al denominatore: questo consente facili raccoglimenti e successive semplificazioni.

Il grafico che segue riporta i segni della funzione e delle derivate prima e seconda.



La funzione ha dunque un minimo relativo in corrispondenza a $x = 1$, un massimo relativo in corrispondenza a $x = 5$, e due flessi, in corrispondenza dei punti $x = 5 \pm 2\sqrt{3}$. Per tracciare il grafico non resta che trovare le ordinate di questi punti, compito che lasciamo al lettore.

Riportiamo il grafico finale.