

Condensatori e resistenze

Luciano Battaia*

Versione del 22 febbraio 2007

In questa nota presento uno schema riepilogativo relativo ai condensatori e alle resistenze, con particolare riguardo ai collegamenti in serie e parallelo.

Il target principale è costituito dagli studenti Liceali che si accingono ad affrontare l'esame di stato.

È trattato solo il caso delle correnti continue.

Indice

1	Condensatori	1
2	Resistenze	2
3	Batterie	3
4	Collegamenti in serie e in parallelo	4
5	Circuiti <i>RC</i>	6

1 Condensatori

I condensatori sono dei dispositivi, costituiti da due conduttori appaiati, detti *armature*, in grado di accumulare carica. Essi sono caratterizzati da una costante, detta *capacità*, data da

$$C = \frac{Q}{V},$$

dove Q è la carica accumulata e V è la differenza di potenziale tra le due armature.

Anche se le analogie idrauliche non sono sempre correttamente applicabili all'elettromagnetismo, in prima approssimazione un condensatore può essere paragonato a una coppia di serbatoi per liquidi, per esempio a forma di parallelepipedo, identici. Se essi contengono la stessa quantità di liquido, la differenza tra i livelli raggiunti nei due serbatoi è nulla. Se, mediante un opportuno dispositivo, il liquido viene trasferito da un serbatoio all'altro, allora si produce una differenza di livello, tanto più grande quanto più piccola è la sezione dei parallelepipedi. Questo processo corrisponde alla carica del

*<http://www.batmath.it>

condensatore: la quantità di acqua in eccesso in un serbatoio rispetto all'altro corrisponde alla carica Q , la differenza di livello alla differenza di potenziale V . La minore o maggiore sezione orizzontale corrisponde alla minore o maggiore capacità.

Se, dopo aver prodotto un certo dislivello, si collegano i due serbatoi, si ha un flusso di liquido che però dura solo fin quando si è ristabilito l'equilibrio, per poi cessare completamente.

I condensatori si rappresentano nei circuiti elettrici con il simbolo seguente:

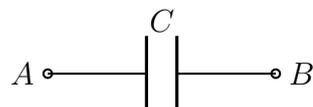


Figura 1: Simbolo per i condensatori

2 Resistenze

Le resistenze sono conduttori che collegano tra di loro vari dispositivi elettrici. Ci interessiamo esclusivamente alle resistenze ohmiche, caratterizzate da una costante, detta *resistenza*, data dalla legge (di Ohm)

$$R = \frac{V}{i},$$

dove i è la corrente e V la differenza di potenziale.

Nei circuiti elettrici le resistenze si indicano con il simbolo seguente:

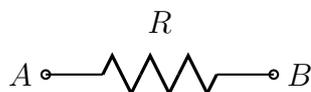


Figura 2: Simbolo per le resistenze

Se il potenziale in A è maggiore che in B , la corrente fluisce da A verso B : si usa dire che il passaggio di corrente in una resistenza provoca una *caduta di potenziale* nel verso della corrente. Qualunque componente di un circuito metallico dove circoli corrente ha una resistenza, ma, nella pratica, alcune parti del circuito hanno resistenze enormemente più elevate che altre: per questo si usano schematizzare i circuiti con le resistenze concentrate solo in determinate zone, rappresentate col simbolo sopra indicato, mentre le restanti parti sono considerate prive di resistenza e rappresentate con tratti di filo rettilineo. Si deve notare che, su un tratto di filo rettilineo, il passaggio di corrente non provoca caduta di potenziale, ovvero che su questi tratti il potenziale è costante, esattamente come avviene per i conduttori in equilibrio elettrostatico.

Proseguendo con l'analogia idraulica, e sempre tenendo conto dei suoi limiti, una resistenza può essere pensata come un tubo di collegamento fra due serbatoi che hanno liquido a diverso livello, e con la caratteristica di "frenare" il liquido stesso nel passaggio

da un serbatoio all'altro. Se per esempio collego con una resistenza le due armature di un condensatore carico, avrò un passaggio di corrente molto forte all'inizio, e poi via via più debole, man mano che la differenza di potenziale fra le due armature diminuisce fino ad annullarsi. È sostanzialmente quanto avverrebbe se collegassi due serbatoi d'acqua in cui l'acqua si trovi a diversi livelli.

3 Batterie

Una batteria (o pila, o generatore) è un dispositivo in grado di mantenere ai suoi capi una differenza di potenziale costante.

Riprendendo l'analogia idraulica, in prima approssimazione una batteria può essere pensata come una coppia di serbatoi per liquidi, di cui uno contenente acqua fino ad una certa quota h e l'altro vuoto. Se i due serbatoi vengono collegati, si ha un flusso di acqua dal serbatoio pieno verso quello vuoto. Il meccanismo interno di funzionamento, a differenza di quello che succede nei condensatori, è però in grado di riportare l'acqua dal basso verso l'alto, mantenendo costante la differenza di quota e il flusso nel tubo di collegamento. L'analogia idraulica ci può anche far capire bene il fatto che, dopo che i due serbatoi sono stati collegati, c'è sicuramente un po' di ritardo nel riportare l'acqua dal basso verso l'alto: la differenza di livello durante il funzionamento è un po' più piccola di quanto non sia a serbatoi scollegati. Si usa schematizzare questo fatto dicendo che la batteria è un dispositivo in grado di mantenere una differenza di potenziale fissa, connesso con una resistenza, detta resistenza interna, che, durante il funzionamento, rende la differenza di potenziale effettiva un po' più piccola di quella nominale. Un generatore si dice ideale se questa resistenza interna è nulla (o meglio trascurabile).

La caratteristica distintiva di un generatore è la sua *forza elettromotrice*, ovvero la differenza di potenziale che esso è in grado di mantenere; essa si indica generalmente con f o con \mathcal{E} e si rappresenta con il simbolo seguente:

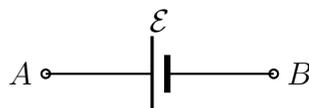


Figura 3: Simbolo per le batterie, o pile

dove il segmento più lungo indica il punto a potenziale più alto.

Si deve tenere conto che, per i generatori ideali, \mathcal{E} è la differenza di potenziale sia a circuito aperto (assenza di corrente) che a circuito chiuso (circolazione di corrente); per i generatori reali, cioè con resistenza interna non nulla, la differenza di potenziale a circuito chiuso è leggermente inferiore rispetto a quella a circuito aperto.

Una batteria collegata ad un condensatore provocherà la carica del condensatore stesso; una batteria collegata ad una resistenza farà circolare corrente nella resistenza stessa: si tratta dei due circuiti elettrici più semplici possibile.

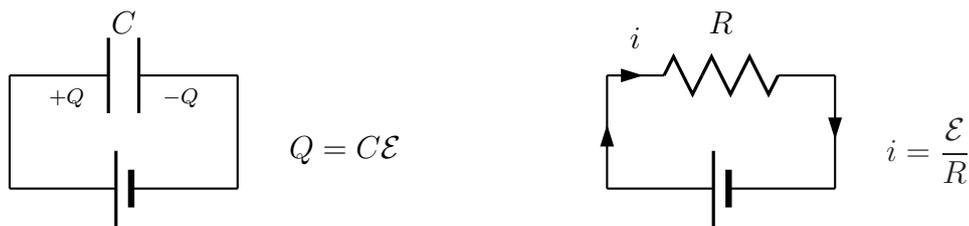


Figura 4: Condensatore e resistenza in un circuito semplice

4 Collegamenti in serie e in parallelo

Una situazione molto comune nelle applicazioni prevede collegamenti di due o più condensatori o resistenze, collegamenti che possono avvenire in *serie* o in *parallelo*.

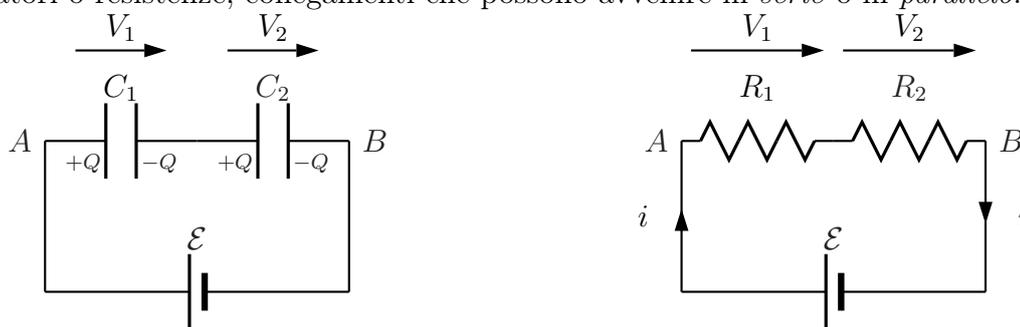


Figura 5: Collegamenti in serie

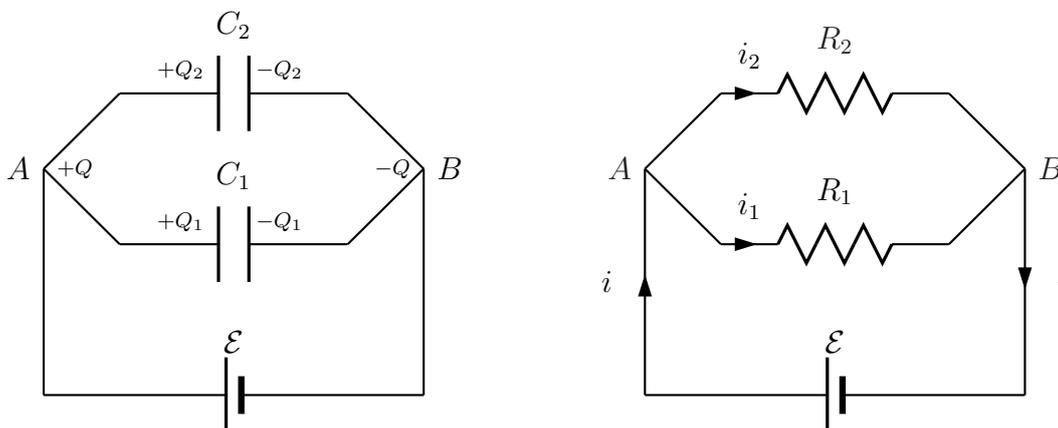


Figura 6: Collegamenti in parallelo

La domanda che ci possiamo porre è la seguente: è possibile sostituire ai due conden-

satori [alle due resistenze] un unico condensatore [un'unica resistenza], in modo che tutta la restante parte del circuito rimanga inalterata, ovvero che non cambino le differenze di potenziale e la carica [la corrente] che il generatore spedisce sui condensatori [sulle resistenze]? In sostanza si tratta di sostituire i circuiti di figure 5 e 6 con circuiti semplici come quelli di figura 4.

La risposta a questa domanda è affermativa e anzi è facile calcolare la capacità [resistenza] del condensatore [della resistenza] da sostituire: la chiameremo *capacità equivalente* [*resistenza equivalente*].

Usiamo le seguenti nomenclature:

- V è la differenza di potenziale tra i punti A e B ;
- Q è la carica totale spedita dalla batteria sui condensatori [i è la corrente totale fatta circolare dalla batteria nel circuito];
- C_{eq} è la capacità equivalente [R_{eq} è la resistenza equivalente];

Teniamo inoltre conto che, per le proprietà dei condensatori [delle resistenze], si deve avere:

$$V = \frac{Q}{C_{eq}}; \quad [V = R_{eq} i].$$

Possiamo allora costruire la seguente tabella.

Condensatori	Resistenze
<i>In serie</i>	
$V = V_1 + V_2$ \Downarrow $\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$ \Downarrow $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$	$V = V_1 + V_2$ \Downarrow $Ri = R_1i + R_2i$ \Downarrow $R = R_1 + R_2$
<i>In parallelo</i>	
$Q = Q_1 + Q_2$ \Downarrow $C_{eq}V = C_1V + C_2V$ \Downarrow $C_{eq} = C_1 + C_2$	$i = i_1 + i_2$ \Downarrow $\frac{V}{R_{eq}} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$ \Downarrow $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$

Lo schema proposto rende evidenti le analogie e le differenze tra il caso dei condensatori e quello delle resistenze e, tra l'altro, il fatto che la capacità è una caratteristica *statica* dei conduttori, mentre la resistenza è una caratteristica *dinamica*.

5 Circuiti RC

Un circuito che preveda la presenza sia di un condensatore che di una resistenza si chiama un *circuito RC*: in esso la corrente continua può circolare solo durante la fase di carica o di scarica del condensatore, in quanto il condensatore può essere considerato equivalente a una interruzione del circuito.

Consideriamo il circuito nella fase di carica.

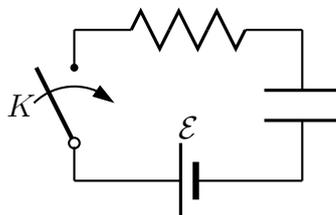


Figura 7: Circuito RC nella fase di carica

Alla chiusura dell'interruttore K , la pila \mathcal{E} comincia a caricare il condensatore: fin tanto che il processo non è completato, e la carica sul condensatore non ha raggiunto il suo valore massimo $Q = C\mathcal{E}$, nel circuito fluisce una corrente i , avente intensità massima subito dopo la chiusura del circuito (quando il condensatore è ancora scarico) e poi intensità via via decrescente man mano che il condensatore si carica.

Se indichiamo con q e V la carica e il potenziale sul condensatore in una fase intermedia, possiamo notare che sia q che V variano nel tempo: $q = q(t)$ e $V = V(t)$; la corrente che fluisce nel circuito è allora $i = q'(t) = dq/dt$. Avremo quindi:

- in $t = 0^+$ (subito dopo la chiusura del circuito) la carica e il potenziale del condensatore saranno 0;
- in un istante intermedio t , la carica e il potenziale del condensatore avranno raggiunto i valori q e V rispettivamente;
- alla fine del processo, la carica e il potenziale del condensatore avranno raggiunto i valori massimi Q e \mathcal{E} rispettivamente, con $Q = C\mathcal{E}$.

In tutte le fasi la somma di tutte le differenze di potenziale nel circuito deve essere 0. Dunque

$$\mathcal{E} - \frac{q}{C} - Ri = 0,$$

ovvero

$$\mathcal{E} - \frac{q(t)}{C} - Rq'(t) = 0.$$

Si tratta di un'equazione che ha come incognita la funzione $q = q(t)$ e che stabilisce un legame tra l'incognita e la sua derivata prima: un'equazione di questo tipo si chiama un'equazione differenziale. Non è facilissimo (ma nemmeno troppo difficile) trovarne le soluzioni. Qui però ci interessa solo segnalare che la funzione

$$q = q(t) = C\mathcal{E} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right)$$

è l'unica soluzione che soddisfa anche la condizione che, per $t = 0$, si abbia $q = 0$.

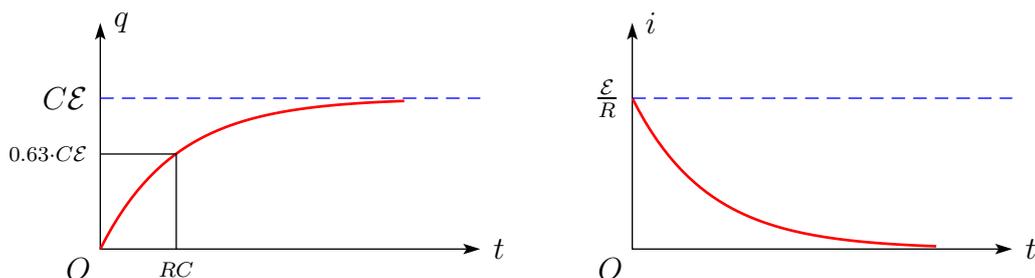


Figura 8: Grafico della carica e della corrente nella fase di carica di un circuito RC

Si noti, nella figura 8, che dopo un tempo $t = RC$, la carica ha raggiunto circa i due terzi del suo valore finale.

Per la fase di scarica del circuito basta immaginare, una volta caricato il condensatore, di eliminare la pila, collegando i suoi capi.

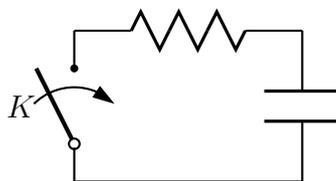


Figura 9: Circuito RC nella fase di scarica

L'equazione del circuito differirà dalla precedente solo per la mancanza del termine \mathcal{E} :

$$\frac{q(t)}{C} + Rq'(t) = 0.$$

Ci sarà la seguente modifica delle condizioni:

- in $t = 0^+$ (subito dopo la chiusura del circuito) la carica e il potenziale del condensatore avranno il valore massimo Q e \mathcal{E} , con $Q = C\mathcal{E}$;
- in un istante intermedio t , la carica e il potenziale del condensatore saranno calati fino a raggiungere i valori q e V rispettivamente;
- alla fine del processo, la carica e il potenziale del condensatore saranno nulli.

Anche questa volta l'equazione che fornisce la carica è un'equazione differenziale, e l'unica soluzione che verifica le condizioni iniziali date è:

$$q = q(t) = C\mathcal{E}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Questa volta i grafici della carica e della corrente (anzi del modulo della corrente, perchè, come derivata della carica, essa sarebbe negativa) sono:

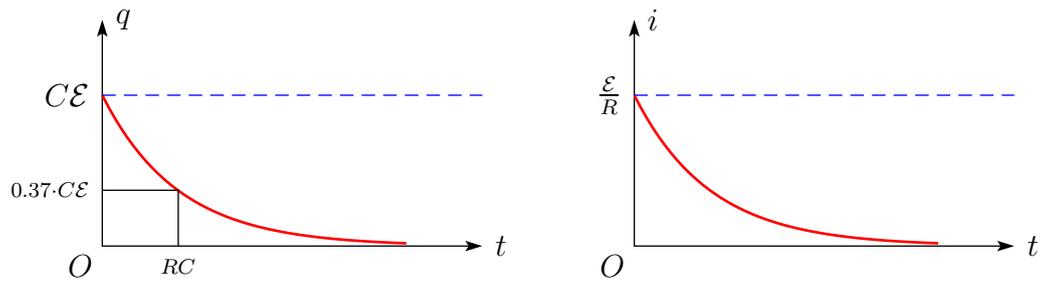


Figura 10: Grafico della carica e della corrente nella fase di scarica di un circuito RC

Si noti, nella figura 10, che dopo un tempo $t = RC$, la carica è calata a circa un terzo del suo valore iniziale.