

Necessaria o sufficiente?

Luciano Battaia*

Versione del 30 aprile 2007

In questo fascicolo propongo alcuni esercizi relativi al problema della verifica della necessità e/o sufficienza delle condizioni contenute nei teoremi di analisi delle funzioni reali di variabile reale.

Lo scopo è quello di fornire un aiuto in vista della preparazione all'esame di stato di liceo scientifico. Non sono proposte dimostrazioni, che si possono trovare su un qualunque testo di analisi e, in molti casi, anche su <http://www.batmath.it>, quanto piuttosto esempi e controesempi del tipo di quelli richiesti nelle prove d'esame.

Il linguaggio utilizzato, seppure rigoroso, è, per quanto possibile, semplice ed informale.

Indice

1 Richiami sulle definizioni	1
2 Esercizi	3

1 Richiami sulle definizioni

Richiamo le definizioni di condizione necessaria e di condizione sufficiente, mettendole su due colonne parallele, per favorire un utile confronto tra le due situazioni¹.

Condizione necessaria

A è condizione necessaria per B se

$B \wedge (\neg A)$ è falsa (è una contraddizione).

La definizione formale appena data può anche essere espressa a parole, in vari modi.

Condizione sufficiente

A è condizione sufficiente per B se

$A \wedge (\neg B)$ è falsa (è una contraddizione).

La definizione formale appena data può anche essere espressa a parole, in vari modi.

*<http://www.batmath.it>

¹Il simbolo \wedge significa *et* oppure *e contemporaneamente*. Il simbolo \neg significa *non*.

- A è condizione necessaria per B se B implica A , cioè se in presenza di B è presente sempre A .
- A è condizione necessaria per B , se mancando A , B non può essere presente (attenzione però: la presenza di A non permette, in generale, di assicurare la presenza di B !).

In sostanza si può dire che quando A è condizione necessaria per B , in mancanza di A è inutile andare a controllare la presenza di B , in quanto B è assente sicuramente.

Esempio 1.1. Data una funzione $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, la continuità di f è condizione necessaria per la derivabilità di f .

In questo caso:

- A : continuità di f ;
- B : derivabilità di f .

Allora:

- una funzione derivabile è sicuramente continua (B implica A);
- una funzione non continua non può essere derivabile (se manca A manca anche B). Attenzione, però: la presenza di A non garantisce la presenza di B : un esempio è la funzione $f(x) = |x|$ che è continua ma non derivabile.

- A è condizione sufficiente per B se A implica B , cioè se in presenza di A è presente sempre B .
- A è condizione sufficiente per B , se mancando B , A non può essere presente (attenzione però: la mancanza di A non permette, in generale, di escludere la presenza di B !).

In sostanza si può dire che quando A è condizione sufficiente per B , in presenza di B è utile andare a controllare la presenza di A , in quanto A non è detto che sia presente.

Esempio 1.2. Data una funzione $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, la continuità di f è condizione sufficiente per l'integrabilità (secondo Riemann) di f .

In questo caso:

- A : continuità di f ;
- B : integrabilità di f .

Allora:

- una funzione continua è sicuramente integrabile (A implica B);
- una funzione non integrabile non può essere continua (se manca B manca anche A). Attenzione, però: la mancanza di A non implica la mancanza di B : un esempio è la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ che non è continua ma è integrabile.

Condizione necessaria e sufficiente

A è condizione necessaria e sufficiente per B se A implica B e contemporaneamente B implica A , ovvero se A e B sono equivalenti.

Esempio 1.3. Sia p un polinomio di terzo grado: $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Condizione necessaria e sufficiente perché esso abbia tre radici reali è che la funzione $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ abbia un massimo ed un minimo relativo di segno opposto.

I teoremi di analisi delle funzioni reali di variabile reale che esprimano condizioni necessarie e sufficienti sono molto rari e solo raramente sono trattati a livello di scuola media superiore. Ne citerò uno, solo per completezza e per la sua bellezza: Una funzione limitata $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ se e solo se l'insieme dei suoi punti di discontinuità ha misura nulla nel senso di Lebesgue.

2 Esercizi

Esercizio 2.1. *Date due funzioni f e g , definite in un intorno di un punto x_0 , dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria perché*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = l \in \mathbb{R}$$

è che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = l_1 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)) = l_2 \in \mathbb{R}.$$

La sufficienza è conseguenza dei noti teoremi sui limiti. La non necessità si può provare con esempi.

Le funzioni

$$f(x) = \sin^2 x \quad \text{e} \quad g(x) = \cos^2 x$$

non hanno limite per $x \rightarrow +\infty$, ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1.$$

Le funzioni

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = 2 - x$$

hanno, per $x \rightarrow +\infty$, rispettivamente limite $+\infty$ e $-\infty$, ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 - x) = 2.$$

Esercizio 2.2. *Date due funzioni f e g , definite in un intorno di un punto x_0 , dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria perché*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l \in \mathbb{R}$$

è che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) = l_1 \in \mathbb{R} \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)) = l_2 \in \mathbb{R}.$$

La sufficienza è conseguenza dei noti teoremi sui limiti. La non necessità si può provare con esempi.

Le funzioni

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = e^{-x}$$

hanno, per $x \rightarrow +\infty$, limite $+\infty$ e 0 rispettivamente, ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) = 0.$$

Le funzioni

$$f(x) = \sin x + 2 \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{e^{-x} + 2}{\sin x + 2}$$

non hanno, per $x \rightarrow +\infty$, limite, ma

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) \cdot g(x)) = 2.$$

Esercizio 2.3. Date due funzioni f e g , definite in un intorno di un punto x_0 , e tali che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) \exists, \text{ finito o infinito} \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)) \exists, \text{ finito o infinito},$$

dimostra che condizione necessaria ma non sufficiente affinché

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \infty$$

è che almeno uno dei due limiti precedenti sia infinito.

Verificare poi che se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)) \nexists \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (g(x)) \nexists,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x))$$

può essere $+\infty$.

Se i due limiti fossero finiti, il limite del prodotto sarebbe finito. Se però uno dei due limiti è infinito, non è detto che il limite del prodotto sia infinito. Basta considerare le funzioni

$$f(x) = x \quad \text{e} \quad g(x) = e^{-x}$$

che hanno, per $x \rightarrow +\infty$, limite $+\infty$ e 0 rispettivamente, mentre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (xe^{-x}) = 0.$$

Per la seconda parte basta considerare, per esempio, le funzioni

$$f(x) = x \sin x \quad \text{e} \quad g(x) = \frac{1}{\sin x}, \quad \text{per } x \rightarrow +\infty.$$

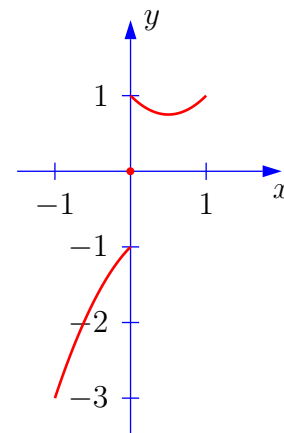
Esercizio 2.4. Data una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, verifica che le condizioni

- $f(a) = f(b)$,
- f continua in $[a, b]$
- f derivabile in $]a, b[$,

sono sufficienti ma non necessarie per l'esistenza di un punto $c \in]a, b[$ tale che $f'(c) = 0$.

La sufficienza è il teorema di Rolle, la non necessità si può provare con esempi. Si potrebbero portare tre esempi in ciascuno dei quali manchi una delle condizioni, e verificare che esiste ugualmente un punto c in cui $f'(c) = 0$.

In realtà si può portare anche un esempio in cui mancano tutte tre le condizioni, senza che ciò impedisca l'esistenza del punto c con le caratteristiche richieste. Basta considerare la funzione $f(x) = (x^2 - x + 1) \operatorname{sgn}(x)$, in $[-1, 1]$, che non è continua (e quindi, a fortiori, non è derivabile), né ha valori uguali agli estremi, ma ha ugualmente un punto a derivata nulla, e precisamente il punto $x = 1/2$. Il grafico è rappresentato a fianco.



Esercizio 2.5. Verifica che le tre condizioni contenute nell'esercizio precedente sono essenziali per la validità del teorema di Rolle, nel senso che se ne manca anche una sola il teorema può non essere vero.

La funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$$

ha valori uguali agli estremi di $[0, 1]$, è derivabile in $]0, 1[$, ma non ha alcun punto a derivata nulla (non è continua in $[0, 1]!$).

La funzione $f(x) = |x|$ ha, in $[-1, 1]$, valori uguali agli estremi ed è continua, ma non ha alcun punto a derivata nulla (non è derivabile in $] - 1, 1[!$).

La funzione $f(x) = x$ è continua e derivabile in $[0, 1]$, ma non ha alcun punto a derivata nulla (non ha valori uguali agli estremi di $[0, 1]!$).

Esercizio 2.6. Data una funzione $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, derivabile, dimostra che condizione necessaria ma non sufficiente perché abbia un estremo (massimo o minimo) relativo in un punto di ascissa x_0 è che $f'(x_0) = 0$.

La necessità della condizione è uno dei teoremi fondamentali sui massimi e minimi. La non sufficienza si può provare con esempi. Basta considerare la funzione $f(x) = (x - 1)^3$ che ha derivata nulla nel punto $x = 1$, senza avere ivi né massimo né minimo.

Esercizio 2.7. Data una funzione $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, derivabile due volte, dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria perché abbia un estremo (massimo o minimo) relativo in un punto di ascissa x_0 è che $f'(x_0) = 0 \wedge f''(x_0) \neq 0$.

La sufficienza della condizione è uno dei teoremi fondamentali sui massimi e minimi (che permettono anche di distinguere il massimo dal minimo a seconda che $f''(x_0) < 0$ o, rispettivamente, $f''(x_0) > 0$). La non necessità si può provare considerando l'esempio della funzione $f(x) = x^4$, che ha un minimo in $x = 0$, pur essendo $f''(0) = 0$.

Esercizio 2.8. Data una funzione $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, derivabile due volte, dimostra che condizione necessaria ma non sufficiente perché abbia un flesso in un punto di ascissa x_0 è che $f''(x_0) = 0$.

La necessità della condizione è uno dei teoremi fondamentali sui flessi. La non sufficienza si può provare considerando l'esempio della funzione $f(x) = x^4$ che ha $f''(0) = 0$ senza avere un flesso in 0.

Esercizio 2.9. Data una funzione $f:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$, derivabile quanto serve e tale che $f'(x_0) = 0$, dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria perché x_0 sia di estremo relativo proprio è che esista una derivata di ordine pari che sia diversa da zero in x_0 .

La sufficienza della condizione è uno dei teoremi fondamentali sui massimi e minimi. La non necessità si prova considerando l'esempio della funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

che ha tutte le derivate nulle nell'origine, pur avendo un minimo nell'origine.

Esercizio 2.10. Sia $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ un funzione integrabile (secondo Riemann). Dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria perchè

$$\int_a^b f(x) dx = 0$$

è che $f(x) = 0 \forall x \in [a, b]$.

La sufficienza della condizione è banale. La non necessità si può provare con l'esempio della funzione $f(x) = \sin x$ che ha integrale nullo in $[0, 2\pi]$ senza essere ivi identicamente nulla.

Esercizio 2.11. Sia data una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria perchè $|f|$ sia integrabile secondo Riemann in $[a, b]$ è che f sia integrabile in $[a, b]$.

La sufficienza della condizione è una delle proprietà essenziali dell'integrale di Riemann. La non necessità si prova considerando la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

che ha modulo integrabile su ogni intervallo chiuso e limitato di \mathbb{R} , ma che non è ivi integrabile.

Esercizio 2.12. Sia data una funzione $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, derivabile e tale che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Prova che condizione sufficiente ma non necessaria perchè

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}$$

è che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l.$$

Se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = l,$$

si può applicare il teorema di l'Hôpital al calcolo di

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x},$$

ottenendo esattamente l .

Che la condizione non sia necessaria si può provare considerando la funzione $f(x) = x + \sin x$, per la quale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x} = 1$$

senza che esista il limite per $x \rightarrow +\infty$ di $f'(x)$.

Esercizio 2.13. Sia f una funzione razionale fratta (quoziente di due polinomi). Prova che condizione necessaria ma non sufficiente affinché essa abbia un asintoto verticale è che il denominatore abbia almeno una radice.

Una funzione ha un asintoto verticale se e solo se, in corrispondenza ad un numero x_0 , si ha

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty.$$

Una funzione razionale fratta può avere limite infinito solo in corrispondenza di uno zero del denominatore, in quanto in ogni altro punto è continua: questo prova la necessità della condizione. La non sufficienza si può verificare considerando l'esempio di

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1},$$

che non ha un asintoto in corrispondenza di $x = -1$.

Esercizio 2.14. Sia data una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, derivabile. Dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria affinché f sia strettamente crescente in $[a, b]$ è che $f'(x) > 0 \forall x \in [a, b]$.

La sufficienza è una facile conseguenza del teorema di Lagrange. La non necessità è provata dal fatto che, per esempio, $f(x) = x^3$ è strettamente crescente, ma ha derivata nulla in zero.

Un esempio ancora più significativo è la funzione $g(x) = x + \sin x$ che è strettamente crescente ma ha derivata nulla in infiniti punti (precisamente in tutti i punti in cui il seno vale -1 , ovvero $x = -\pi/2 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$).

Esercizio 2.15. Sia data una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria perché f sia invertibile (supposto di restringere il codominio all'immagine) è che sia strettamente crescente.

La sufficienza è ovvia. La non necessità si può provare con un controesempio come uno dei seguenti.

$$- f(x) = (x + 2) \operatorname{sgn}(x) \quad x \in [-1, 1];$$

$$- f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Esercizio 2.16. Sia data una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria perché assuma tutti i valori compresi tra il suo massimo e il suo minimo è che sia continua.

La sufficienza è contenuta in un noto teorema. La non necessità si può provare considerando per esempio la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1] \\ -x & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [-1, 1] \end{cases}$$

Esercizio 2.17. Dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria perché la somma di due funzioni sia continua è che le due funzioni siano continue.

La sufficienza è contenuta in un noto teorema. La non necessità si prova considerando una qualunque funzione discontinua e la sua opposta: la somma delle due è identicamente nulla, dunque ovviamente continua.

Si può considerare anche un esempio più singificativo:

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

La somma di queste due funzioni è la funzione costantemente uguale a 1, dunque continua, nonostante f e g non siano continue.

N.B. Si tenga però presente che la somma di una funzione (f) continua con una (g) discontinua non può essere continua: posto infatti $h = f + g$, se h fosse continua lo sarebbe anche $h - f = g$, che è in contrasto con l'ipotesi.

Esercizio 2.18. *Dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria perchè il prodotto di due funzioni sia continuo è che le due funzioni siano continue.*

La sufficienza è contenuta in un noto teorema, la non necessità si può provare considerando le funzioni $f(x) = x$ (continua) e $g(x) = \operatorname{sgn}(x)$ (discontinua), il cui prodotto $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ coincide con la funzione valore assoluto, che è notoriamente continua.

N.B. Si noti il diverso comportamento del prodotto tra una funzione discontinua e una continua rispetto alla somma delle stesse funzioni.

Esercizio 2.19. *Sia data una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dimostra che condizione necessaria ma non sufficiente perché f sia continua è che sia limitata.*

La necessità è conseguenza di un noto teorema. La non sufficienza si prova, per esempio, considerando la funzione $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ in un intervallo contenente lo zero.

Esercizio 2.20. *Sia data una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Dimostra che condizione sufficiente ma non necessaria perché la funzione integrale*

$$\int_a^x f(t) dt$$

sia derivabile, è che f sia continua.

La sufficienza è contenuta nel teorema fondamentale del calcolo integrale. La non necessità si può provare considerando, per esempio, la funzione $f(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$ in un intervallo contenente lo zero.

Esercizio 2.21. *Sia p un polinomio. Dimostra che condizione sufficiente, ma non necessaria, perchè il polinomio abbia radici reali è che i limiti a $+\infty$ e $-\infty$ abbiano segno opposto.*

La sufficienza è banale conseguenza della continuità di ogni polinomio e del fatto che, nelle ipotesi dette, il polinomio assume valori di segno opposto. La non necessità si prova considerando, per esempio, il polinomio $p(x) = x^2 - 1$.