Funzioni. . . senza limiti

Luciano Battaia*

Versione del 18 aprile 2007

Propongo, in questa nota, una serie di esempi di grafici di funzioni tracciati per via elementare, senza l'uso del calcolo differenziale.

Una trattazione abbastanza dettagliata di queste tecniche si può trovare in *Grafici tracciabili per via elementare*, reperibile all'indirizzo http://www.batmath.it/matematica/a_grafelem/grafelem.htm. Qui si fissa l'attenzione in particolare sulle funzioni che possono essere tracciate facendo opportuno uso della teoria delle coniche.

Indice

1 Grafici di funzioni razionali fratte usando le iperboli

In questo primo paragrafo si considerano funzioni razionali fratte del tipo

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{oppure} \quad f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e}.$$

Scrivendole nella forma

$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad \text{oppure} \quad y = \frac{ax^2+bx+c}{dx+e},$$

riducendo allo stesso denominatore e portando tutto nel primo membro, si verifica immediatamente che si tratta di coniche (equazioni di 2° grado in due incognite), che, tranne casi degeneri, hanno come grafico iperboli, in quanto dotate di asintoti.

Esempio 1.
Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

— Se $c = 0$ si tratta chiaramente di una retta: $y = \frac{a}{d}x + \frac{b}{d}$.

*http://www.batmath.it

— Se $ax+b$ è un multiplo di $cx+d$ (il che succede se $ad-bc=0$), allora la funzione è una retta, privata del punto di ascissa $x=-{}^{d}/_{c}$. La condizione qui considerata si usa esprimere dicendo, anche se in maniera impropria, che "il numeratore si semplifica con il denominatore".
Per esempio la funzione

$$f(x)=\frac{x-2}{2x-4}$$

ha come grafico quello della retta $y={}^{1}/_{2}$, privato del punto di ascissa 2.

— Negli altri casi (cioè nei casi non banali), la funzione ha come grafico una iperbole equilatera di asintoti
- $y={}^{a}/_{c}$,
- $x=-{}^{d}/_{c}$.

Per valutare esattamente se si tratta di un'iperbole "crescente" o di un'iperbole "decrescente", basta ora trovarne un punto.

Osservazione

Trattandosi di funzione razionale fratta (se $c\neq 0$) è conveniente, come si dovrebbe sempre fare con questo tipo di funzioni, eseguire la divisione del numeratore per il denominatore, con la nota regola.

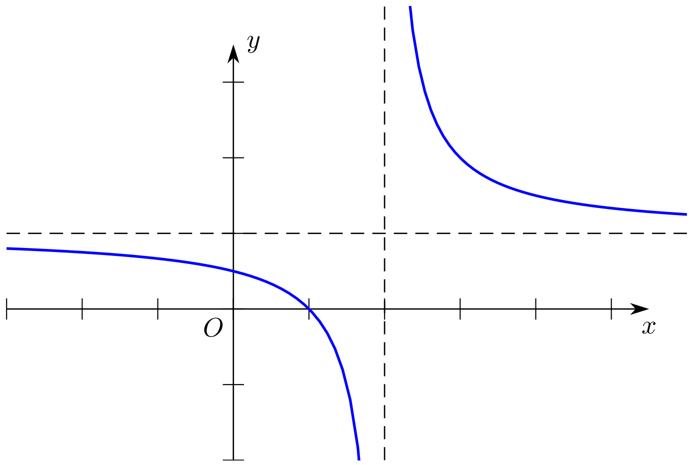
$$\begin{array}{cc|c} ax & +b & cx+d \\ \cline{3-3} -ax & -{}^{ad}/_{c} & {}^{a}/_{c} \\ \cline{1-2} / & b-{}^{ad}/_{c} & \end{array}$$

Questo porta a scrivere la funzione come

$$f(x)=\frac{a}{c}+\frac{b-{}^{ad}/_{c}}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{1}{c}\frac{bc-ad}{cx+d}\,,$$

da cui derivano facilmente tutte le caratteristiche sopra riportate.

$$f(x)=\frac{x-1}{x-2}$$



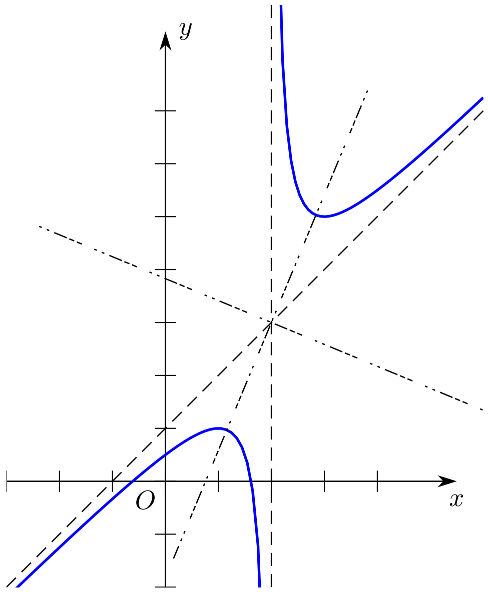
Esempio 2.
Tracciare il grafico della funzione

$$f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx+e}\,,\qquad a\neq 0\,.$$

— Se $d=0$ si tratta chiaramente di una parabola.
— Se il numeratore è multiplo del denominatore si tratta di una retta, privata del punto $x={}^{e}/_{d}$.
— Negli altri casi si tratta di un'iperbole con un asintoto verticale e uno obliquo: per tracciarne il grafico conviene dividere (si tratta di una funzione razionale fratta!) il numeratore per il denominatore.

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 1}{x - 2} = x + 1 + \frac{1}{x - 2}\,.$$

Gli asintoti sono dunque $y = x + 1$ (ottenuto dal quoziente della divisione), e $x = 2$ (ottenuto uguagliando a zero il denominatore).



La determinazione degli assi dell'iperbole è facile: si tratta delle due bisettrici degli angoli individuati dagli asintoti. A questo punto, se si vogliono determinare i vertici, basta trovare le intersezioni tra una delle due bisettrici e la stessa iperbole.

Per completezza riporto anche i calcoli per la determinazione delle suddette bisettrici, seguendo la strategia più elementare: le bisettrici sono il luogo geometrico dei punti $P(s,t)$ del piano *equidistanti* dai lati dell'angolo. Per determinare il luogo occorre ricordare la formula per la distanza, $d(P,r)$, tra un punto $P(s,t)$ e una retta $r\colon ax + by + c = 0$ (scritta in forma implicita),

$$d(P,r) = \frac{|as + bt + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Nel caso in esame le equazioni degli asintoti sono $r\colon x - y + 1 = 0$ e $s\colon x - 2 = 0$. La condizione $d(P,r) = d(P,s)$ porge allora:

$$\frac{|s - t + 1|}{\sqrt{2}} = |s - 2| \quad \Rightarrow \quad \frac{s - t + 1}{\sqrt{2}} = \pm(s - 2)\,.$$

Distinguendo i due casi, semplificando e scrivendo x e y al posto di s e t, si ottengono le equazioni delle bisettrici degli angoli individuati dai due asintoti:

$$(1 - \sqrt{2})x - y + 1 + 2\sqrt{2} = 0 \quad , \quad (1 + \sqrt{2})x - y + 1 - 2\sqrt{2} = 0\,,$$

che risultano (come deve essere!) perpendicolari.

2 Grafici di funzioni irrazionali usando circonferenze, ellissi, e iperboli

In questo secondo paragrafo si considerano funzioni irrazionali del tipo

$$f(x) = ax + b + c\sqrt{dx^2 + ex + f}\,, \quad \text{con } d \text{ ed } e \text{ non entrambi nulli,}$$

naturalmente con il trinomio di 2° grado sotto radice non sempre negativo.

Scrivendole nella forma

$$y = ax + b + c\sqrt{dx^2 + ex + f} \ \text{ ovvero } \ y - ax - b = c\sqrt{dx^2 + ex + f}\,,$$

si verifica subito che deve essere

$$y - ax - b \geq 0 \ \text{ oppure } \ y - ax - b \leq 0\,,$$

a seconda che c sia positivo o negativo.

Scrivendo l'opportuna condizione si può elevare al quadrato ambo i membri dell'equazione data, ottenendo una conica (equazione di 2° grado in due incognite), di cui dovremo prendere in considerazione solo una parte (quella che soddisfa la condizione scritta).

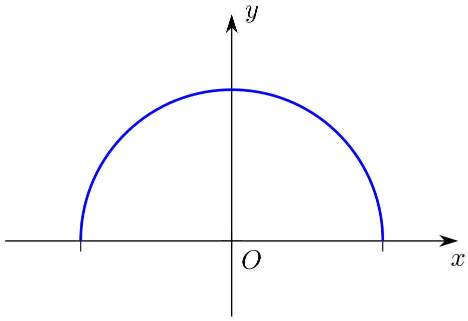
Esempio 3.
Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}\,.$$

Seguendo il procedimento indicato si trova che il grafico richiesto coincide con quello delle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Si tratta dunque della semicirconferenza di centro l'origine e raggio 1, situata "al disopra" dell'asse x.



Con lo stesso procedimento si potrebbe tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 1 + \sqrt{1 - x^2}\,,$$

ottenendo

$$\begin{cases} y \geq 1 \\ (y-1)^2 = 1 - x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + (y-1)^2 = 1 \end{cases}.$$

Si tratta del grafico della semicirconferenza, già ottenuto, ma traslato di una unità verso l'alto.

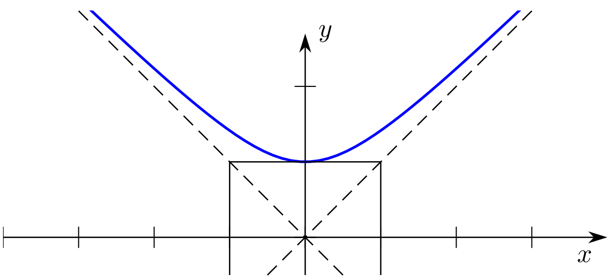
Esempio 4.
Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 + x^2}\,.$$

Procedendo come nell'esempio 3 si trova:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad -x^2 + y^2 = 1 \end{cases}.$$

Si tratta dunque di una semiiperbole equilatera di centro l'origine e semiassi uguali a 1, situata "al disopra" dell'asse x.



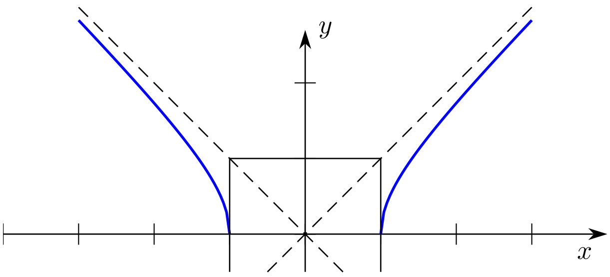
Esempio 5.
Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1}\,.$$

Procedendo come nell'esempio 4 si trova:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = 1 \end{cases} .$$

Si tratta ancora di una semiiperbole equilatera di centro l'origine e semiassi uguali a 1, situata "al disopra" dell'asse x.



Esempio 6.
Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{|x^2 - 8x + 7|} .$$

Procedendo nel modo ormai abituale si trova:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = |x^2 - 8x + 7| \end{cases} .$$

A questo punto conviene considerare due casi, a seconda che l'argomento del valore assoluto sia positivo o negativo.

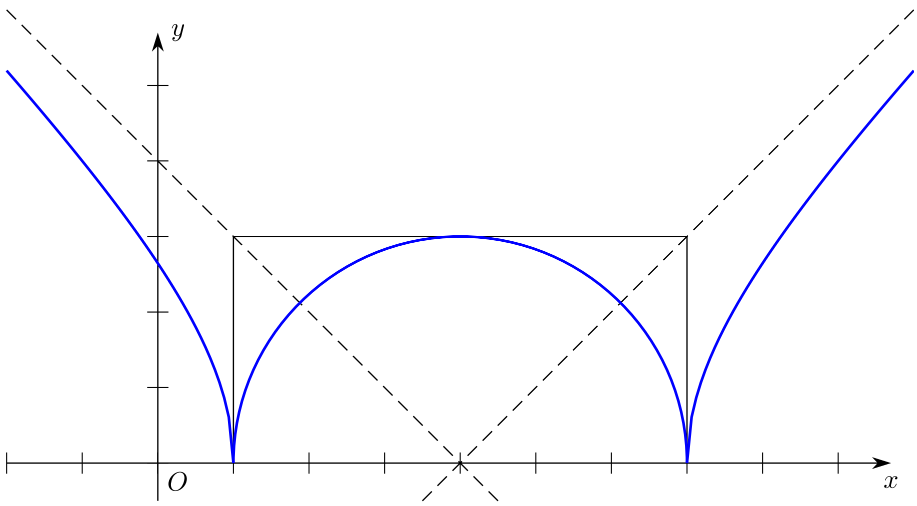
— Se $x^2 - 8x + 7 \geq 0$ si ottiene:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = x^2 - 8x + 7 \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2 - y^2 = 9 \end{cases} .$$

— Se $x^2 - 8x + 7 < 0$ si ottiene:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = -x^2 + 8x - 7 \quad \Rightarrow \quad (x-4)^2 + y^2 = 9 \end{cases} .$$

Si tratta dell'unione tra una semiiperbole equilatera di centro $C(4,0)$ e semiassi uguali a 3 e una semicirconferenza con lo stesso centro e raggio uguale a 3, entrambe situate "al disopra" dell'asse x.



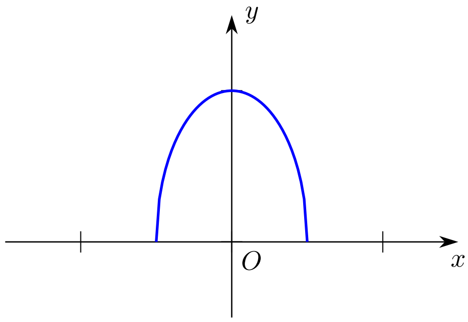
Esempio 7.
Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = \sqrt{1 - 4x^2} .$$

Seguendo il procedimento solito si trova

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ y^2 = 1 - 4x^2 \end{cases} \Rightarrow \quad 4x^2 + y^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{1/4} + y^2 = 1 \quad .$$

Si tratta dunque della semiellisse di centro l'origine e semiassi $1/2$ e 1, situata "al disopra" dell'asse x.



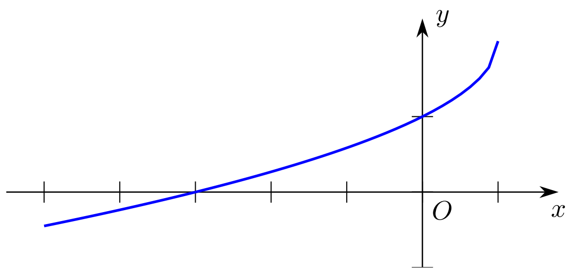
Esempio 8.
Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = 2 - \sqrt{1-x}\,.$$

Si trova facilmente:

$$\begin{cases} y \leq 2 \\ (y-2)^2 = 1 - x \end{cases} \Rightarrow \quad x = -y^2 + 4y - 3 \quad .$$

Si tratta della semiparabola con asse parallelo all'asse delle x, concavità verso sinistra, vertice $V(1,2)$, situata "al disotto" della retta $y = 2$.



3 ... quasi senza limiti

Il caso di funzioni irrazionali del tipo considerato nel paragrafo 2, con la x che "compare esplicitamente" fuori radice, è più complesso, in quanto una elevazione al quadrato (dopo aver naturalmente posto le opportune condizioni), fa comparire il termine misto: si tratta dunque di una conica con assi di simmetria non paralleli agli assi coordinati. È comunque opportuno ricordare, ai fini di una maggior precisione nel grafico e della ricerca di sue eventuali proprietà geometriche, che si tratta comunque di una parte di conica.

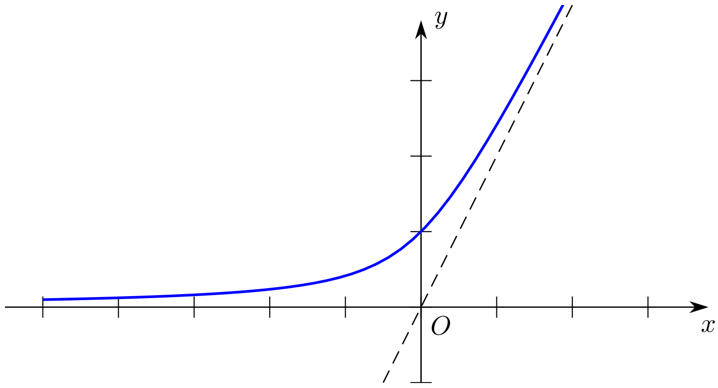
In alcuni casi si possono trarre comunque conclusioni senza uno studio approfondito, valutando, per esempio, il "comportamento asintotico". Vediamolo su due esempi.

Esempio 9.
Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x + \sqrt{1+x^2}\,.$$

La funzione ha come dominio tutto $\mathbb{R}$, dunque sicuramente non si tratta di un'ellisse. Inoltre, per $x \to +\infty$, si comporta come la retta $y = 2x$, mentre per $x \to -\infty$ si comporta come la retta $x = 0$. Infatti se x è molto grande (positivamente o negativamente), $1 + x^2 \simeq x^2$ e quindi $\sqrt{1+x^2} \simeq |x|$.

In sostanza la conica, di cui il grafico di $f(x)$ è parte, ha due asintoti: si tratta dunque di un'iperbole (unica conica con asintoti). A questo punto è molto facile tracciare il grafico, tenendo anche conto che si tratta di una funzione sempre positiva.



Esempio 10.
Tracciare il grafico della funzione

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}\,.$$

La funzione ha come dominio tutto $]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$, dunque sicuramente non si tratta di un'ellisse. Inoltre, per $x \to +\infty$, si comporta come la retta $y = 2x$, mentre per $x \to -\infty$ si comporta come la retta $x = 0$. Infatti se x è molto grande (positivamente o negativamente), $x^2 - 1 \simeq x^2$ e quindi $\sqrt{1 + x^2} \simeq |x|$.

In sostanza la conica, di cui il grafico di $f(x)$ è parte, ha due asintoti: si tratta ancora di un'iperbole (unica conica con asintoti). Dobbiamo però tenere conto anche del fatto che la funzione è positiva per gli x positivi, negativa per gli x negativi.