Funzioni con parametri

Luciano Battaia*

Versione del 27 febbraio 2007

Questa nota contiene una raccolta di alcune tecniche di uso comune da applicare nella ricerca dei valori che possono assumere gli eventuali parametri che compaiono nella definizione di funzioni reali di variabile reale. La trattazione è fatta, senza alcuna pretesa di sistematicità e completezza, utilizzando alcuni esempi significativi, spesso desunti da temi proposti agli esami di stato, con opportuni adattamenti, a volte necessari per eliminare gli errori presenti nei testi. Queste pagine sono scritte per fornire un aiuto concreto, e il più possibile semplice, agli studenti che si accingono a sostenere gli esami di stato e, anche per questo, il linguaggio usato è volutamente informale.

Indice

*http://www.batmath.it

Esempio 1 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione suppletiva 2000, quesito 2).
Si determinino i valori delle costanti reali m ed n in modo che
— $\int_0^1 \mathrm{e}^{mx+n}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^n}{m}$;
— $\int_0^2 \mathrm{e}^{mx+n}\,\mathrm{d}x = 3$.

Una primitiva della funzione integranda è:

$$\frac{\mathrm{e}^n}{m}\mathrm{e}^{mx}\,.$$

Le condizioni date si traducono allora nel sistema

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{e}^n}{m}\left(\mathrm{e}^m - 1\right) = \frac{\mathrm{e}^n}{m} \\ \frac{\mathrm{e}^n}{m}\left(\mathrm{e}^{2m} - 1\right) = 3 \end{cases}\,.$$

Il sistema è sufficientemente semplice e ha come unica soluzione la coppia:

$$\big(m = \ln 2,\ n = \ln(\ln 2)\big)\,.$$

* * *

Esempio 2 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione suppletiva 1996, quesito 1).
In un piano, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali Oxy, sono assegnate le curve grafico delle funzioni:

$$x \mapsto f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{x^3}\,,$$

ove a e b sono parametri reali.

Trovare la relazione che intercorre tra questi parametri affinché le curve abbiano un punto di massimo e uno di minimo relativi, e quali ulteriori condizioni devono essere verificate affinché tali punti, quando esistono, abbiano ascisse di segno concorde.

Trovare poi i valori di a e b affinché i punti di estremo, quando esistono, abbiano ascisse 1 e 3 rispettivamente.

La derivata prima delle funzioni $f(x)$ è data da:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 - 2ax - 3b}{x^4}\,.$$

Per soddisfare le condizioni richieste tale derivata deve cambiare di segno due volte, e ciò succede solo se il numeratore della frazione ha due radici reali e distinte, ovvero se il polinomio di secondo grado $-2x^2 - 2ax - 3b$ ha discriminante positivo: si trova facilmente $a^2 - 6b > 0$.

Perchè le radici trovate abbiano segno concorde occorre che il loro prodotto sia positivo. Se si ricorda che in un trinomio di secondo grado del tipo ax^2+bx+c, con discriminante positivo, il prodotto delle radici è c/a, si deduce subito che deve essere $(-2)(-3b)>0$, ovvero $b>0$.

La condizione sulle ascisse dei punti di estremo si traduce in una condizione di annullamento della derivata prima, ovvero:

$$\begin{cases} -2-2a-3b=0 \\ -18-6a-3b=0 \end{cases} .$$

Si trova facilmente $a=-4$, $b=2$.

***

Esempio 3 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione ordinaria 1997, quesito 2)**.** *Fra le funzioni*

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^4+ax^2+b}{x^2+1}\,, \quad a,\, b \in \mathbb{R}$$

determinare quella che soddisfa alle seguenti condizioni:

— *la retta di equazione $y=1$ taglia la curva grafico della funzione in due punti e le è tangente in un ulteriore punto;*

— *l'asse delle x è tangente alla curva grafico in due punti distinti.*

Si comincia con l'osservare che la curva è pari (simmetrica rispetto all'asse y) per cui necessariamente i due punti di intersezione con la retta $y=1$ devono essere simmetrici rispetto all'asse y stessa, mentre il punto di tangenza deve appartenere all'asse y ed essere di massimo o di minimo (si può anche osservare che il dominio naturale della funzione è $\mathbb{R}$, dove essa risulta sicuramente derivabile). Stessa osservazione per i due punti di tangenza con l'asse x che saranno simmetrici rispetto all'origine.

La prima delle condizioni date si può allora esplicitare in

— condizione di *passaggio* per $A(0,1)$;

— condizione affinchè la derivata prima si annulli per $x=0$.

Bisognerà poi valutare anche che cosa implichi il fatto che la curva grafico interseca la retta $y=1$ in altri due punti.

Ma andiamo per ordine. La condizione di passaggio fornisce subito $b=1$. Calcolando la derivata prima si ottiene poi:

$$f'(x) = \frac{(4x^3+2ax)(x^2+1)-(x^4+ax^2+1)2x}{(x^2+1)^2}.$$

Senza nemmeno bisogno di eseguire i calcoli si vede subito che questa derivata si annulla, in corrispondenza di $x=0$, per qualunque scelta del parametro a. Del resto il testo fornisce una ulteriore condizione (tangenza all'asse x) che non è stata ancora utilizzata: se la sola prima condizione (anzi una parte perchè non l'abbiamo ancora esaminata completamente) avesse già fornito sia il valore di a che quello di b, si sarebbe dovuto concludere o che la seconda condizione era superflua, oppure che il problema non aveva soluzioni.

Passiamo ad esaminare la condizione di intersezione della curva grafico con la retta $y=1$ in altri due punti. In generale per trattare l'intersezione tra curve e rette, o tra curve e curve, bisogna considerare il sistema formato dalle due equazioni. Dunque

$$\begin{cases} y &= \dfrac{x^4+ax^2+1}{x^2+1} \\ y &= 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x^2\big(x^2+(a-1)\big)=0 \end{cases}$$

L'equazione $x^2\big(x^2+(a-1)\big)=0$ ha la soluzione $x=0$, corrispondente al punto A e ha altre due soluzioni distinte se e solo se $a<1$.

Esaminiamo ora la condizione di tangenza all'asse x (in due punti distinti). Il modo più naturale di tradurre in termini concreti questa condizione è il seguente:

— esistono due punti C_1 e C_2, di coordinate $(\pm s, 0)$ tali che:
  - il grafico della funzione richiesta passa per C_1 e C_2;
  - la derivata prima si annulla in corrispondenza di $\pm s$.

Si noti che il valore di s non è noto, e che dunque questo modo di procedere *aggiunge* un nuovo parametro incognito a quello già previsto nel testo e non ancora determinato (cioè a). Dal punto di vista formale però la condizione si traduce in due equazioni che, se risulteranno indipendenti, permetteranno di determinare entrambi i parametri. Procediamo a scrivere il sistema (senza spaventarci per la apparente complessità dello stesso!):

$$\begin{cases} \dfrac{s^4+as^2+1}{s^2+1}=0 \Longrightarrow s^4+s^2+1=0 \\ \dfrac{(4s^3+2as)(s^2+1)-(s^4+as^2+1)2s}{(s^2+1)^2}=0 \Longrightarrow 4s^3+2as=0 \end{cases}$$

Per semplificare la seconda equazione abbiamo tenuto conto della prima. Ricavando $a=-2s^2$ dalla seconda e sostituendo nella prima si trova facilmente $s^4-2s^4+1=0$, ovvero $s=\pm1$. Tenendo poi conto della condizione $a<1$, si trova infine $a=2$.

* * *

Esempio 4 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione ordinaria 1998, quesito 1)**.** *In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, sono assegnate le curve grafico delle funzioni*

$$x \mapsto f(x)=ax^3+3x+b\,,$$

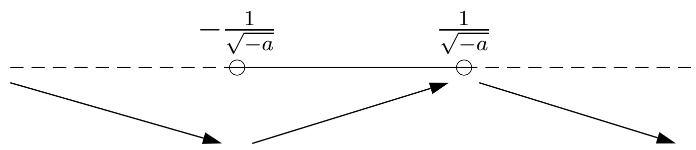
dove a e b sono parametri reali, con $a\neq 0$.

— *Determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo e uno di minimo relativi, e quelli per i quali non hanno né massimi né minimi relativi.*

— *Calcolare i valori di a e b in modo che la curva γ corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e sechi l'asse y nel punto di ascissa $-2\sqrt{2}$.*

Nel rispondere alla prima domanda occorre ricordare che una funzione polinomiale, e in genere una funzione derivabile come quella qui proposta, può avere massimi o minimi relativi solo in corrispondenza di un cambio di segno nella derivata prima. Avendosi $f'(x)=3ax^2+3$, la derivata prima può avere cambi di segno solo se $a<0$ (altrimenti sarebbe sempre strettamente positiva e la corrispondente funzione sempre strettamente crescente). Con la condizione $a<0$ la derivata prima risulta positiva per $-1/\sqrt{-a}<x<1/\sqrt{-a}$ (*attenzione*: a è negativo e quindi

$\sqrt{-a}$ ha perfettamente senso!). La funzione avrà dunque un *minimo* per $x = -1/\sqrt{-a}$ e un *massimo* per $x = 1/\sqrt{-a}$. Si veda anche la figura che segue.



Se $a = 0$ le curve grafico si riducono a rette (e quindi non si hanno né massimi né minimi relativi); se $a > 0$ la derivata risulta, come già osservato, è strettamente positiva e quindi, ancora, non si hanno né massimi né minimi relativi.

Per quanto riguarda la seconda domanda osserviamo intanto che, in generale, non si tratta di un problema banale, perchè è assegnata l'ordinata del massimo e non l'ascissa. Tenendo comunque conto di quanto già trovato (cioè che la funzione ha un massimo in corrispondenza di $x = 1/\sqrt{-a}$), possiamo scrivere la condizione di annullamento della derivata prima nel punto $x = 1/\sqrt{-a}$:

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{-a}}\right) = a\left(\frac{1}{\sqrt{-a}}\right)^3 + 3\left(\frac{1}{\sqrt{-a}}\right) + b = 0\,;$$

da qui si trova subito

$$b = -\frac{2}{\sqrt{-a}}\,.$$

La seconda condizione imposta dal testo è una semplice *condizione di passaggio* per il punto $(-2\sqrt{2}, 0)$:

$$f(-2\sqrt{2}) = a\left(-2\sqrt{2}\right)^3 + 3\left(-2\sqrt{2}\right) + b = 0\,,$$

ovvero

$$-16a\sqrt{2} - 6\sqrt{2} + b = 0\,.$$

Mettendo a sistema le due condizioni ottenute, sostituendo il valore di b fornito dalla prima equazione nella seconda, e semplificando, si ottiene l'equazione risolvente nell'incognita a:

$$8\sqrt{2}a\sqrt{-a} + 3\sqrt{2}\sqrt{-a} + 1 = 0\,.$$

Si tratta di un'equazione di non facile soluzione e per la quale la strategia più semplice consiste nel porre $\sqrt{-a} = t$, ovvero $a = -t^2$. Eseguita la sostituzione e le semplificazioni opportune si ottiene l'equazione

$$8\sqrt{2}t^3 - 3\sqrt{2}t - 1 = 0\,.$$

Si tratta di un'equazione di terzo grado, con *coefficienti non razionali*, e alla quale dunque non si può applicare il metodo noto per la ricerca delle eventuali radici razionali. La scelta più razionale in un caso del genere è quella di provare a tracciare, almeno sommariamente, il grafico della funzione $t \mapsto g(t) = 8\sqrt{2}t^3 - 3\sqrt{2}t - 1$. I limiti notevoli sono immediati, ma la cosa che interessa è che, trattandosi di una cubica, la derivata prima è di secondo grado e quindi ha un segno facilmente determinabile. Si ottiene precisamente che la funzione ha un massimo e un minimo relativo rispettivamente nei punti di coordinate

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,, 0\right) \quad , \quad \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\,, -2\right)\,.$$

La fortunata circostanza che il valore del massimo relativo sia proprio 0, ci permette di concludere che l'equazione data ha due radici coincidenti di valore $t_{1,2} = -1/2\sqrt{2}$ e una terza radice positiva, a questo punto facilmente determinabile: basterà dividere il polinomio dato per $t + 1/2\sqrt{2}$.

$$
\begin{array}{rrrr|l}
8\sqrt{2}t^3 & & -3\sqrt{2}t & -1 & t+\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cline{5-5}
-8\sqrt{2}t^3 & -4t^2 & & & 8\sqrt{2}t^2-4t-2\sqrt{2} \\ \cline{1-4}
// & -4t^2 & -3\sqrt{2}t & -1 & \\
 & +4t^2 & +\sqrt{2}t & & \\ \cline{2-4}
 & // & -2\sqrt{2}t & -1 & \\
 & & 2\sqrt{2}t & +1 & \\ \cline{3-4}
 & & // & // &
\end{array}
$$

A questo punto si potrebbero trovare le radici del quoziente (trattandosi di polinomio di secondo grado), ma si può anche procedere ad una ulteriore divisione per $t + 1/2\sqrt{2}$ (la radice $-1/2\sqrt{2}$ è una radice doppia). Si ottiene

$$
\begin{array}{rrr|l}
8\sqrt{2}t^2 & -4t & -2\sqrt{2} & t+\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ \cline{4-4}
-8\sqrt{2}t^2 & -4t & & 8\sqrt{2}t^2-8 \\ \cline{1-3}
// & -8t & -2\sqrt{2} & \\
 & 8t & +2\sqrt{2} & \\ \cline{2-3}
 & // & // &
\end{array}
$$

Si deduce immediatamente che la terza radice è $t = 1/\sqrt{2}$. Tenendo conto che $t = \sqrt{-a}$, e che quindi $t > 0$, la radice che interessa è proprio quest'ultima. Si trova, finalmente, $a = -1/2$, da cui $b = -2\sqrt{2}$.

Commento

La ricerca dei valori di a e b in questo problema è, come appare chiaro dalla soluzione proposta, abbastanza laboriosa e, a mio avviso, assolutamente improponibile in un esame di stato. Si può solo osservare che la restante parte del problema proseguiva dicendo, testualmente,

> *Controllato che il valore a è $-1/2$, ...*

Mi pare assolutamente scorretto chiedere ad un candidato di *determinare* i valori dei parametri per poi invitarlo implicitamente ad un comportamento logicamente errato, del tipo:

> *Visto che l'equazione risolvente del problema è troppo complessa, approfitto della domanda successiva per trovarne le soluzioni ...*

Rimane solo da segnalare che questo è solamente un esempio dei numerosi problemi che si riscontrano nei testi degli esami di stato!

* * *

Esempio 5 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione ordinaria 1977, quesito 3).
Date le funzioni

$$x \mapsto f(x) = a \sin x + b \cos x\,,$$

si determinino i valori dei parametri reali a e b in modo che per $x = {}^{2\pi}/_{3}$ sia $f(x) = 1$ e che i valori estremi di f siano $+2$ e -2.

Cominciamo con l'osservare che le funzioni assegnate, per ogni scelta dei valori a e b, sono continue e derivabili in tutto $\mathbb{R}$ e inoltre, come ogni funzione lineare in seno e coseno, possono essere scritte nella forma

$$f(x) = h \sin(x + k)\,,$$

con opportuni valori di h e k. Se ne deduce che la condizione che gli estremi siano $+2$ e -2 è *sovrabbondante*, in quanto in ogni funzione di questo tipo è automatico che se il massimo ha un certo valore, il minimo ha esattamente valore opposto. Alla luce di questa osservazione la condizione sugli estremi può essere formulata semplicemente dicendo che la funzione f ha un massimo di valore 2.

La prima condizione data dal testo è una semplice *condizione di passaggio* che fornisce subito l'equazione

$$a \sin \frac{2}{3}\pi + b \cos \frac{2}{3}\pi = 1 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3}a - b - 2 = 0\,.$$

La seconda condizione data è più complessa da trattare, in quanto viene fornita l'ordinata del massimo, e non l'ascissa. Introdotta allora l'ascissa, diciamola t, come ulteriore incognita, dovremo scrivere la condizione di passaggio per il punto $(t, 2)$, nonchè la condizione di annullamento della derivata prima in corrispondenza di t. Mettendo a sistema queste due equazioni con quella precedentemente trovata si ottiene:

$$\begin{cases} \sqrt{3}a - b - 2 = 0 \\ a \sin t + b \cos t = 2 \\ a \cos t - b \sin t = 0 \end{cases}$$

Si tratta di un sistema di non facile risoluzione (come, purtroppo e inspiegabilmente, succede spesso nei problemi degli esami di stato!). La strategia più semplice consiste nel tentare di trasformare le equazioni in modo da far comparire una sola funzione goniometrica; per questo si comincia con l'osservare che dalla terza equazione è possibile ricavare la tangente, sotto opportune condizioni.
Procediamo con ordine. Se $\cos t = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} \sqrt{3}a - b - 2 = 0 \\ a \sin t = 2 \\ b \sin t = 0 \end{cases} \quad ,$$

da cui si deduce subito che non può essere $\sin t = 0$, e che dunque si deve avere $b = 0$. Allora

$$\begin{cases} a = {}^{2}/_{\sqrt{3}} \\ \sin t = \sqrt{3} \\ b = 0 \end{cases} \quad ,$$

palesemente impossibile. Dunque $\cos t \neq 0$. Se $b = 0$ si ottiene

$$\begin{cases} a = {}^{2}/_{\sqrt{3}} \\ \sin t = \sqrt{3} \\ a \cos t = 0 \end{cases} \quad ,$$

ancora impossibile. Dunque anche $b \neq 0$. Possiamo procedere ricavando $\operatorname{tg} t = {}^{a}\!/_{b}$ dalla terza equazione e trasformando la seconda come segue:

$$a \sin t + b \cos t = 2 \Rightarrow \cos t(a \operatorname{tg} t + b) = 2 \Rightarrow \cos t \left(a\frac{a}{b} + b \right) = 2 \Rightarrow \cos t(a^2 + b^2) = 2b\,.$$

Se si eleva al quadrato e si tiene conto che

$$\cos^2 t = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 t} = \frac{b^2}{a^2 + b^2}\,,$$

si trova $a^2 + b^2 = 4$. Si può dunque considerare il sistema

$$\begin{cases} \sqrt{3}a - b - 2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 4 \end{cases},$$

che ha le seguenti soluzioni:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b = -2 \end{cases}, \quad , \quad \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ b = 1 \end{cases}.$$

Poichè, nel risolvere il sistema, abbiamo proceduto ad un'elevazione al quadrato, è obbligatorio controllare che le soluzioni ottenute verifichino anche il sistema di patenza, cosa di immediata verifica.

——————— * * * ———————

Esempio 6 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione ordinaria 2000, quesito 1)**.**
Tra le funzioni

$$x \mapsto f(x) = ax^3 + bx + c\,,$$

si determini quella che soddisfa alle seguenti condizioni:
— $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 2$*;*
— $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x = -5$*;*
— *ha un flesso in un punto P di ordinata -4.*

Una primitiva delle funzioni date è:

$$F(x) = a\frac{x^4}{4} + b\frac{x^2}{2} + cx\,.$$

Essendo la derivata seconda $f''(x) = 6ax$, se ne deduce subito che, per ogni valore dei parametri a, b, c, le funzioni hanno un unico punto di flesso (come succede sempre per le cubiche), questa volta in corrispondenza di $x = 0$. La condizione sull'ordinata del flesso si traduce dunque in una semplice condizione di passaggio per $(0, -4)$. Si ottiene allora il sistema, nelle incognite a, b, c,

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + c = 2 \\ 4a + 2b + 2c = -5 \\ c = -4 \end{cases},$$

che ha come unica soluzione la terna

$$\left(-7, \frac{31}{2}, -4 \right).$$

——————— * * * ———————

Esempio 7 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione suppletiva 1995, quesito 3).
È assegnata, in un sistema di coordinate cartesiane ortogonali Oxy, la parabola di equazione

$$y = f(x) = -ax^2 + bx + c\,,$$

ove i coefficienti a, b, c sono numeri reali non negativi.

Determinare tali coefficienti in modo che:

— *la parabola intersechi l'asse delle ascisse nel punto O e in ulteriore punto A;*
— *detto V il vertice, il triangolo $\triangle OVA$ sia rettangolo;*
— *il segmento parabolico individuato dalla corda OA generi, in una rotazione completa attorno all'asse delle ascisse, un solido di volume $^{128\pi}/_{15}$.*

La condizione di passaggio per O fornisce subito $c = 0$. L'ascissa[1] del vertice è $^b/_{2a}$ e dunque è positiva. Tenendo conto che la parabola volge la concavità verso il basso, se ne deduce che il vertice V sta nel primo quadrante e deve stare sulla bisettrice $y = x$, dato che il triangolo $\triangle OVA$ deve essere rettangolo. Il punto $(^b/_{2a}, {}^b/_{2a})$ deve appartenere dunque alla parabola: la relativa condizione di passaggio fornisce subito $b = 2$.

Per tenere conto dell'ultima condizione posta, si comincia con l'osservare che, se il vertice ha ascissa $^b/_{2a} = {}^1/_a$, il punto A deve avere ascissa doppia e quindi si deve avere

$$\pi \int_0^{2/a} (-ax^2 + 2x)^2 \, \mathrm{d}x = \frac{128}{15}\pi\,.$$

Se ne ricava facilmente che $a = {}^1/_2$.

——————— * * * ———————

Esempio 8 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione suppletiva 1994, quesito 2).
In un piano, riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali Oxy, sono assegnate le curve grafico delle funzioni

$$x \mapsto f(x) = \frac{x-a}{2x+a}\,,$$

dove a è un parametro reale non nullo.

1. *Dimostrare che tutte le curve hanno un ed un solo punto, A, in comune;*
2. *Tra le curve considerate determinare quelle che intercettano un segmento di lunghezza $^{4\sqrt{10}}/_3$ sulla retta passante per A e di coefficiente angolare 3.*

Ricordo (anche se non è importante per la risoluzione del problema) che le curve date prendono il nome di *funzioni omografiche* e hanno come grafico un'iperbole equilatera con asintoti paralleli agli assi coordinati (escluso il caso che il numeratore sia "multiplo" del denominatore, nel qual caso di ottiene una retta privata di un punto; ma questo caso non può presentarsi qui, perché $a \neq 0$). Una famiglia di funzioni dipendenti da un parametro ha punti in comune

[1] Si noti che il primo coefficiente è $-a$ e non a, anche se a me pare che questa sia una inutile complicazione che sicuramente può aver portato problemi agli studenti abituati sempre a scrivere questo tipo di parabole nella forma $y = ax^2 + bx + c$: meglio sarebbe stato usare altri nomi per i coefficienti ...

se per qualche valore di x, il corrispondente $f(x)$ non dipende dal parametro. Per risolvere questo problema una possibilità è quella di trovare i punti di intersezione tra due curve della famiglia e poi verificare se per caso i punti trovati stanno anche su tutte le altre curve.

$$a = 1\colon y = \frac{x-1}{2x+1}\,, \quad a = 2\colon y = \frac{x-2}{2x+2}\,.$$

Il sistema tra le due curve dà facilmente $x = 0$, che fornisce proprio il punto cercato $A(0, -1)$. Un'altra possibilità è quella delineata nei passaggi che seguono.

$$y = \frac{x-a}{2x+a} \;\Rightarrow\; 2xy + ay = x - a \;\Rightarrow\; a(y+1) + (2xy - x) = 0\,.$$

A questo punto è chiaro che ogni coppia (x, y) che sia soluzione del sistema

$$\begin{cases} y + 1 = 0 \\ 2xy - x = 0 \end{cases}$$

rappresenta un punto che appartiene al grafico di tutte le funzioni della famiglia. Si ottiene di nuovo il punto $A(0, -1)$.

La retta passante per A e di coefficiente angolare 3 ha equazione $y = 3x - 1$. Le intersezioni tra questa retta e le curve date si ottengono dalla risoluzione del sistema:

$$\begin{cases} y = 3x - 1 \\ y = \dfrac{x-a}{2x+a} \end{cases}\,,$$

che fornisce

$$B\left(-\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}a + \frac{1}{2}\right)\,.$$

Non resta che calcolare la distanza tra A e B e uguagliarla a $4\sqrt{10}/3$. Si ottengono due valori per a:

$$\begin{cases} a_1 = -5/3 \\ a_2 = 11/3 \end{cases}\,.$$

* * *

Esempio 9 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione suppletiva 1993, quesito 3)**.** *Determinare il valore della costante reale k in modo che la funzione*

$$x \mapsto f(x) = \left|\frac{\sin x}{k - \cos x}\right|$$

abbia un massimo per $x = \pi/3$.

La funzione data, che si può scrivere come $f(x) = |g(x)|$, è continua in tutto il suo dominio naturale, ma non è necessariamente ivi derivabile. Tenendo conto comunque delle proprietà del valore assoluto, si può affermare che condizione necessaria perché f abbia un massimo è che g abbia derivata nulla: infatti gli eventuali punti di non derivabilità di f sono solo quelli dove g cambia di segno, che, per f, sarebbero punti di minimo, addirittura di minimo assoluto.

Tenendo conto di questa osservazione, calcoliamo $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{k\cos x - 1}{(k - \cos x)^2}.$$

Si ha allora:

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \frac{k}{2} - 1 = 0 \Rightarrow k = 2\,.$$

È poi immediato controllare che il valore $k = 2$ soddisfa la condizione del problema.

* * *

Esempio 10 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione ordinaria 1997, quesito 2)**.** *Sia data la funzione*

$$f(x) = \begin{cases} -3x^2 + ax & se \quad x \leq 1 \\ {}^{b}\!/_{x^2} & se \quad x > 1 \end{cases}.$$

Si determinino le costanti reali a e b in modo che la funzione e la sua derivata siano continue.

La funzione data è sicuramente continua e derivabile in $A = \mathbb{R} \setminus 1$, in quanto in un intorno opportuno di ogni punto di A coincide o con la funzione $g(x) = -3x^2 + ax$ o con al funzione $h(x) = {}^{b}\!/_{x^2}$, ovviamente continue e derivabili fin che si vuole. Si ha anche

$$f'(x) = \begin{cases} -6x + a & se \quad x < 1 \\ -{}^{2b}\!/_{x^3} & se \quad x > 1 \end{cases}$$

Rimane da esaminare il comportamento nel punto 1.

1. Per la continuità basterà che

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1)\,,$$

da cui si deduce che deve essere

$$-3 + a = b\,.$$

2. Per la derivabilità e la continuità della derivata basterà che[2]

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} f'(x)\,,$$

da cui si deduce che deve essere

$$-6 + a = -2b\,.$$

Si conclude che la funzione soddisfa alle condizioni poste dal testo se $a = 4$ e $b = 1$.

* * *

[2] È opportuno ricordare che se una funzione è continua in tutto un intorno di punto c, derivabile almeno per $x \neq c$, ed ha i limiti sinistro e destro della derivata prima in c finiti ed uguali ad un certo numero l, allora la funzione è derivabile anche in c con derivata uguale a l (e quindi con derivata continua in c). Si tratta di un teorema di uso continuo, noto come *Teorema del limite della derivata*.

Esempio 11 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione suppletiva 1988, quesito 1). *Si determinino i coefficienti dell'equazione $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a > 0)$, in modo che la curva da essa rappresentata in un piano riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy*

1. *sia simmetrica rispetto all'origine;*
2. *abbia nell'origine per tangente la bisettrice del secondo e quarto quadrante;*
3. *sia tale che l'area (complessiva) delle regioni finite di piano delimitate dalla stessa curva e dalla retta congiungente i suoi punti di massimo e minimo relativo sia $1/2$.*

Una funzione è simmetrica rispetto all'origine (o *dispari*) se tale è il suo dominio e se $f(x) = -f(-x)$, per ogni x del dominio. Se ne deduce subito che, se 0 sta nel dominio, $f(0) = 0$, ovvero che il grafico della funzione deve passare per l'origine. Inoltre un polinomio per essere dispari deve contenere solo potenze dispari (la cosa non è vera per funzioni che non siano polinomi!). Dunque, intanto, $b = d = 0$.

Posto $f(x) = ax^3 + bx$ si ha $f'(x) = 3ax^2 + b$; poiché deve essere $f'(0) = -1$, si deduce subito che $b = -1$, ovvero che $f(x) = ax^3 - x$ e $f'(x) = 3ax^2 - 1$.

Ricordando che $a > 0$, si trova che la derivata prima della funzione cambia di segno in corrispondenza di $-1/\sqrt{3a}$ e $1/\sqrt{3a}$. Il primo di questi due punti è l'ascissa del massimo, il secondo quella del minimo. Le corrispondenti ordinate sono $2/3\sqrt{3a}$ e $-2/3\sqrt{3a}$. La retta che passa per i punti di massimo e minimo ha dunque equazione $y = (2/3)x$.

Tenendo conto della già utilizzata simmetria della curva rispetto all'origine, si può osservare che l'area di cui parla il testo è costituita da due regioni equiestese, una nel secondo quadrante (compresa tra il grafico della funzione e la retta $y = (2/3)x$) e una nel quarto quadrante (compresa tra la retta $y = (2/3)x$ e il grafico della funzione). La condizione del testo si può allora scrivere (considerando l'area del quarto quadrante)

$$\frac{1}{2} = 2 \int_0^{1/\sqrt{3a}} \left(-\frac{2}{3}x - ax^3 + x \right) \mathrm{d}x \,,$$

da cui si ricava facilmente $a = 1/9$.

——————— * * * ———————

Esempio 12 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione ordinaria 1981, quesito 1). *Si determinino i valori delle costanti reali a, b, c, d in modo che il grafico della funzione*

$$x \mapsto f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2}$$

abbia come asintoto obliquo la retta $y = x - 2$, abbia un estremo relativo nel punto di ascissa $x = 2$, e un flesso nel punto di ascissa $x = -1$

Ricordo che un funzione razionale fratta ha un asintoto obliquo se e solo se il grado del numeratore supera di 1 quello del denominatore e che, per trovare l'asintoto si può procedere semplicemente alla divisione tra il numeratore e il denominatore (senza bisogno di calcolare limiti di alcun tipo): l'equazione dell'asintoto sarà $y = Q(x)$, dove $Q(x)$ è il quoziente della divisione. Nel caso in esame la divisione in questione è addirittura banale e fornisce come quoziente $Q(x) = ax + b$. Si deve dunque avere $a = 1$ e $b = 2$, e quindi

$$f(x) = x - 2 + \frac{cx + d}{x^2} \,.$$

Le derivate prima e seconda sono, rispettivamente,

$$f'(x) = 1 + \frac{-cx - 2d}{x^3} \qquad f''(x) = \frac{2cx + 6d}{x^4}\,.$$

Le restanti condizioni del testo richiedono che $f'(2) = 0$ e $f''(-1) = 0$. Si trova facilmente $c = 3$ e $d = 1$.

——————————— * * * ———————————

Esempio 13 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso sperimentale, sessione ordinaria 2003, problema 2). *Sia*

$$f(x) = a2^x + b2^{-x} + c\,,$$

con a, b, c costanti reali. Si determinino a, b, c in modo che:
— *la funzione f sia pari;*
— $f(0) = 2$ *;*
— $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2\ln 2}$.

Affinché f sia pari deve essere, per ogni x del dominio di f, che coincide con $\mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$, ovvero

$$a2^x + b2^{-x} + c = a2^{-x} + b2^x + c \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Se ne deduce:

$$(a - b)2^x = (a - b)2^{-x} \quad \Rightarrow \quad (a - b)4^x = (a - b)\,,$$

e quest'ultima uguaglianza è possibile per ogni x reale se e solo se $a - b = 0$, ovvero $a = b$.

La condizione $f(0) = 2$ implica $a + b + c = 2$, ovvero $2a + c = 2$.

Per utilizzare l'ultima condizione basta calcolare le primitive di 2^x e di 2^{-x}. Si tratta in realtà di primitive elementari, ma, per evitare errori sempre in agguato durante gli esami, è opportuno riscrivere le funzioni utilizzando la base e:

$$2^x = \mathrm{e}^{x\ln 2} \quad 2^{-x} = \mathrm{e}^{-x\ln 2}\,.$$

Allora:

$$\int_0^1 (a2^x + a2^{-x} + c)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (a\mathrm{e}^{x\ln 2} + a\mathrm{e}^{-x\ln 2} + c)\,\mathrm{d}x = \\ = \left[a\frac{\mathrm{e}^{x\ln 2}}{\ln 2} - a\frac{\mathrm{e}^{-x\ln 2}}{\ln 2} + cx\right]_0^1 = \frac{3}{2\ln 2}\,.$$

Si trova facilmente $a = b = 1$ e $c = 0$.

——————————— * * * ———————————

Esempio 14 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione ordinaria 2003, problema 2). *È assegnata la funzione*

$$f(x) = \frac{2x + 1}{x^2 + m + |m|}\,, \quad m \in \mathbb{R}\,.$$

Determinare il suo dominio di derivabilità.

Calcolare per quale valore di m la funzione ammette una derivata che risulti nulla per $x = 1$.

Conviene distinguere due casi per m.

Caso 1 $m > 0$ La funzione diventa

$$f_1(x) = \frac{2x+1}{x^2+2m}\,, \quad m > 0\,,$$

che ha chiaramente dominio $\mathbb{R}$, dove, essendo una funzione razionale fratta, è anche derivabile.

Caso 2 $m \leq 0$ La funzione diventa

$$f_2(x) = \frac{2x+1}{x^2}\,,$$

che ha chiaramente dominio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, dove, essendo una funzione razionale fratta, è anche derivabile.

Calcoliamo le derivate di f_1 e di f_2 e teniamo conto della condizione posta dal problema.

$$f_1'(x) = \frac{2(-x^2-x+2m)}{(x+2m)^2} \ \Rightarrow\ f_1'(1) = \frac{4(m-1)}{(1+2m)^2}$$

$$f_2'(x) = \frac{2(-x-1)}{x^3} \ \Rightarrow\ f_2'(1) = -4$$

Si conclude subito che un valore di m che soddisfi alle condizioni poste dal problema esiste solo nel primo caso e si ha precisamente $m = 1$.

***

Esempio 15.

Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ax^2+x+1 & -2 \leq x \leq 0 \\ b\operatorname{tg} x + c & 0 < x \leq \pi/4 \end{cases}\,,$$

si trovino i valori delle costanti reali a, b, c, in modo che f soddisfi il teorema di Rolle nel suo dominio.

La funzione è continua e derivabile per tutti gli x del dominio, tranne 0. Per l'applicabilità del teorema di Rolle deve intanto essere continua e derivabile anche in 0. Si ha:

— $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} ax^2+x+1 = 1\,;$

— $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} b\operatorname{tg} x + c = c\,;$

— $f(0) = 1\,.$

Dovrà dunque essere $c = 1$.

Calcoliamo poi $f'(x)$, per $x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2ax+1 & -2 \leq x < 0 \\ b(1+\operatorname{tg}^2 x) & 0 < x \leq \pi/4 \end{cases}\,.$$

Applicando il solito teorema sul limite della derivata (tenendo conto che abbiamo già controllato la continuità di f), concludiamo che se

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = l \quad (l \in \mathbb{R})\,,$$

la funzione è derivabile anche in 0 (con derivata continua). Se ne deduce che deve essere $b = 1$.

Per l'applicabilità del teorema di Rolle, inoltre, la funzione deve avere valori uguali agli estremi:

$$f(-2) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow 4a - 1 = 2 \Rightarrow a = \frac{3}{4}.$$

* * *

Esempio 16.
Data la famiglia di funzioni

$$f(x) = (m-2)x^3 - mx + 2\,, \quad m \in \mathbb{R}\,,$$

si dimostri che, al variare di m, tutti i loro grafici passano per tre punti A, B, C, allineati, e di cui si chiedono le coordinate. Si dica per quali valori di m esse ammettono massimi e minimi e per quali invece non ne ammettono.

Riscritta la funzione nella forma $m(x^3 - x) = y + 2x^3 - 2$, si tratta di trovare le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^3 - x = 0 \\ y + 2x^3 - 2 = 0 \end{cases}.$$

Si trovano facilmente i punti $A(0,2)$, $B(1,0)$, $C(-1,4)$. Per provare che sono allineati, si può trovare la retta passante per A e B ($y = -2x + 2$) e controllare che C appartiene a questa retta. Alternativamente, e in maniera più elegante, si può osservare che tra le curve della famiglia cìè anche la retta ($y = -2x + 2$), ottenibile per $m = 2$, per cui i tre punti devono necessariamente appartenere a questa retta.

Essendo poi $f'(x) = 3(m-2)x^2 - m$, si conclude facilmente che:

— se $m = 2$ la derivata prima è sempre negativa (si tratta della retta già considerata);

— se $m = 0$ la derivata è negativa, tranne in zero dove si annulla, per cui la funzione è strettamente decrescente (ha un flesso orizzontale decrescente in 0) e non ci sono massimi o minimi;

— se $m - 2$ ed m hanno segno concorde la derivata prima cambia di segno due volte e quindi ci sono massimi e minimi (questo succede per $m < 0 \vee m > 2$);

— se $m - 2$ ed m hanno segno discorde la derivata prima è di segno costante e quindi non ci sono massimi o minimi (questo succede per $0 < m < 2$).

* * *

Esempio 17.
Sono date la parabola $y = 2x^2 - 3x + 2$ e la famiglia di funzioni

$$x \mapsto f(x) = ke^{\frac{x-1}{x}}.$$

Si determini il valore di k affinché la parabola e la funzione siano tangenti.

Due curve sono tra di loro tangenti in un punto se:

— passano entrambe per quel punto;

— hanno in quel punto la medesima tangente, ovvero la medesima derivata.

Introdotta allora come incognita l'ascissa, t, del punto di tangenza, e calcolate le derivate delle due funzioni, si deve avere:

$$\begin{cases} 2t^2 - 3t + 2 = ke^{\frac{t-1}{t}} \\ 4t - 3 = \frac{k}{t^2} e^{\frac{t-1}{t}} \end{cases} .$$

Ricavando $ke^{\frac{t-1}{t}}$ da una delle due equazioni e sostituendo nell'altra si trova l'equazione in t: $4t^3 - 5t^2 + 3t - 2 = 0$. Essa ha la radice $t = 1$ e, di conseguenza, si può scrivere (eseguendo la divisione di $4t^3 - 5t^2 + 3t - 2$ per $t - 1$), come $(t - 1)(4t^2 - t + 2) = 0$, da cui si deduce che non vi sono altre radici. Le due curve sono dunque tangenti in un unico punto P di ascissa 1. Per semplice sostituzione di questo valore in una delle due equazioni del sistema si trova subito $k = 1$.

* * *

Esempio 18.
Si consideri la famiglia di funzioni

$$x \mapsto f(x) = \frac{x^2 - (4 - m)x - m - 7}{x^2 - 4x} .$$

Si determini il valore del parametro reale m in modo che la tangente al grafico, nel punto P che tutte le curve-grafico hanno in comune, sia parallela alla retta $14x + 9y + 18 = 0$.

Riscritta la funzione nella forma $x^2y - 4xy - x^2 + 4x + 7 = m(x - 1)$, il punto P comune a tutte le curve-grafico è soluzione del sistema

$$\begin{cases} x^2y - 4xy - x^2 + 4x + 7 = 0 \\ x - 1 = 0 \end{cases} .$$

Si trova facilmente $P(1, {}^{10}\!/\!{}_3)$.

Calcoliamo ora la derivata di $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{(2x - 4 + m)(x^2 - 4x) - (x^2 - 4x + 4m - m - 7)(2x - 4)}{(x^2 - 4x)^2} .$$

Questa derivata, per $x = 1$ deve valere $-{}^{14}\!/\!{}_9$: si ricava $m = 0$.

* * *

Esempio 19.
Determinare le costanti reali a, b, c, d in modo che la funzione

$$f(x) = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^2 - 1}$$

— *abbia come asintoto la retta $y = x$;*
— *sia tangente alla retta $y = 2x + 4$ nel suo punto di ascissa* 0.

Trattandosi di funzione razionale fratta, per la ricerca degli asintoti conviene eseguire la divisione tra il numeratore e il denominatore.

$$
\begin{array}{rllll|l}
ax^3 & +bx^2 & +cx & +d & & x^2-1 \\ \cline{6-6}
-ax^3 & & +ax & & & ax+b \\ \cline{1-5}
// & +bx^2 & +(a+c)x & +d & & \\
 & -bx^2 & & +b & & \\ \cline{2-5}
 & // & +(a+c)x & +(b+d) & &
\end{array}
$$

Confrontando con l'asintoto assegnato nel testo, se ne deduce che $a = 1$ e $b = 0$

La condizione di tangenza implica anche una condizione di passaggio per $(0, 4)$, da cui si deduce subito $d = -4$. Non resta che calcolare la derivata della funzione e uguagliarla a 2, in corrispondenza di $x = 0$: si trova $c = -2$.

——————— * * * ———————

Esempio 20.
Si consideri la funzione

$$f(x) = \frac{ax^4 + bx^2 + c}{h - 2x^2}\,.$$

Si determinino i valori delle costanti reali a, b, c, h, in modo che
— *la funzione abbia per asintoto la retta $x = \sqrt{2}$;*
— *la funzione abbia per curva asintotica la parabola $y = -x^2/2 + 2$;*
— *la funzione ammetta un estremo relativo nel punto di ascissa* 1.

Intanto, trattandosi di funzione razionale fratta, si può avere un asintoto verticale solo in corrispondenza di uno zero del denominatore, da cui si deduce $h = 4$, e la funzione si può scrivere

$$f(x) = \frac{1}{2}\frac{ax^4 + bx^2 + c}{-x^2 + 2}\,.$$

Eseguiamo la divisione tra numeratore e denominatore:

$$
\begin{array}{rll|l}
ax^4 & +bx^2 & +c & -x^2+2 \\ \cline{4-4}
-ax^4 & +2ax^2 & & -ax^2-(b+2a) \\ \cline{1-3}
// & (b+2a)x^2 & +c & \\
 & -(b+2a)x^2 & +2(b+2a) & \\ \cline{2-3}
 & // & c+2b+4a &
\end{array}
$$

La parabola asintotica ha dunque equazione

$$y = -\frac{1}{2}\left(ax^2 + b + 2a\right),$$

che, confrontata con quella data nel testo, fornisce subito: $a = 1$, $b = -6$.

La condizione sull'estremo si utilizza imponendo l'annullamento della derivata prima per $x = 1$. Si trova $c = 9$.

——— * * * ———

Esempio 21.
Nella famiglia di funzioni per cui è $f''(x) = -\cos x - 2\sin 2x$, si individui quella che taglia l'asse delle ascisse nel punto $x = \pi/2$ e ha ivi per tangente la retta di equazione $y = -2x + \pi$.

La famiglia di funzioni si determina con due integrazioni successive:

$$f'(x) = \int (-\cos x - 2\sin 2x)\,\mathrm{d}x = -\sin x + \cos 2x + c$$
$$f(x) = \int (-\sin x + \cos 2x + c)\,\mathrm{d}x = \cos x + \frac{\sin 2x}{2} + cx + d\,.$$

Le condizioni poste dal testo si traducono in

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,, \quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2.$$

Si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\sin\pi}{2} + c\frac{\pi}{2} + d = 0 \\ -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos\pi + c = 2 \end{cases},$$

da cui si ricava $c = 4$ e $d = -1 - 2\pi$.

——— * * * ———

Esempio 22.
Sia $f(x)$ una funzione definita per $x > 0$. Si determini la funzione sapendo che $f'(x) = x\mathrm{e}^x$ e che l'equazione

$$f(x) - \ln x - x^2 = 0$$

ammette la radice x=1.

Per trovare la funzione f procediamo a calcolare le primitive di $x\mathrm{e}^x$:

$$f(x) = \int (x\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int (\mathrm{e}^x x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x x - \int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x x - \mathrm{e}^x + c\,.$$

La condizione sulla radice dell'equazione proposta si traduce allora in:

$$\mathrm{e}^1 \cdot 1 - \mathrm{e}^1 + c - \ln 1 - 1 = 0\,,$$

che fornisce subito $c = 1$.

——— * * * ———

Esempio 23.
Tra tutte le funzioni che soddisfano la seguente equazione

$$f'(x) = \frac{x^3 + 2x}{x^2 + 1}\,,$$

si trovi quella che passa per $(0, 0)$.

Eseguendo la divisione tra x^3+x e x^2+1, si perviene a scrivere la condizione precedente sotto la forma:

$$f'(x)=x+\frac{x}{x^2+1}\,.$$

Per la determinazione di f si procede allora come segue:

$$\int\left(x+\frac{x}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+c\,.$$

La condizione di passaggio per $(0,0)$ fornisce subito $c=0$.

——————— * * * ———————

Esempio 24.
È data la funzione

$$f(x)=(\cos x-a)^2+b^2\sin^2 x\,,\quad a,\,b\in\mathbb{R}\,.$$

Si trovino i valori di a e b sapendo che $f(0)=0$ e che

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x=6\pi\,.$$

La condizione di passaggio per $(0,0)$ fornisce subito a=1. Procediamo ora alla ricerca di una primitiva di $(\cos x-1)^2+b^2\sin^2 x=1-2\cos x+\cos^2 x+b^2\sin^2 x$. Si incontrano difficoltà solo nel calcolo di

$$\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x\,,\ \text{e}\ \int\cos^2 x\,\mathrm{d}x\,.$$

A scopo esemplificativo, applichiamo due metodi diversi per i due integrali (anche se si potrebbe chiaramente ricondurre uno all'altro).

$$\begin{aligned}\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x&=\int\sin x\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\sin x-\int(-\cos x\cos x)\,\mathrm{d}x\\&=-\cos x\sin x+\int(1-\sin^2 x)\,\mathrm{d}x=-\cos x\sin x+x-\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Se ne deduce che:

$$2\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x=x-\cos x\sin x\ \Rightarrow\int\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{x-\cos x\sin x}{2}+c\,.$$

Si ha poi:

$$\int\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,\mathrm{d}x=\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+c\,.$$

Per la condizione posta dal testo si deve allora calcolare:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^{2\pi}(1-2\cos x+\cos^2 x+b^2\sin^2 x)\,\mathrm{d}x=\\&=\left[x-2\sin x+\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+b^2\frac{x-\cos x\sin x}{2}\right]_0^{2\pi}=\\&=\left[\frac{3x}{2}-2\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x+b^2\frac{x-\cos x\sin x}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi(3+b^2)\,.\end{aligned}$$

Si deve dunque avere $\pi(3+b^2)=6\pi$, da cui $b^2=3$.

***

Esempio 25.
Detti $P(x)$ e $Q(x)$ due polinomi, si consideri la funzione razionale fratta

$$x \mapsto f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}\,.$$

Determinare i due polinomi in modo che:
— *il polinomio in due variabili $yQ(x) - P(x)$ sia di terzo grado;*
— *la funzione abbia come unico asintoto verticale la retta $x + 1 = 0$;*
— *la funzione abbia come unico asintoto orizzontale la retta $7y + 10 = 0$;*
— *la funzione abbia un estremo relativo nel punto $A\,(-2,\, -{}^{38}/_{7})$;*
— *il coefficiente del termine di grado massimo del numeratore sia -10.*

Poiché la funzione (razionale fratta) ha un asintoto orizzontale diverso dall'asse delle x, il numeratore e il denominatore devono avere lo stesso grado. Poichè inoltre $yQ(x) - P(x)$ deve essere di terzo grado, ne segue che sia $P(x)$ che $Q(x)$ devono avere grado 2. Scriviamo allora la funzione nella forma

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{dx^2 + ex + h}\,.$$

Eseguendo la divisione tra numeratore e denominatore si ottiene:

$$f(x) = \frac{a}{d} + \frac{\left(b - \frac{ae}{d}\right)x + \left(c - \frac{ah}{d}\right)}{dx^2 + ex + h} \quad \text{ove } a = -10\,.$$

Si ha allora ${}^{a}/_{d} = -{}^{10}/_{d} = -{}^{10}/_{7}$ (asintoto orizzontale), da cui $d = 7$.

Una funzione razionale fratta può avere (attenzione *può* avere, non è detto che li abbia) asintoti verticali solo in corrispondenza di eventuali zeri del denominatore: siccome il denominatore è di secondo grado e si deve avere un *unico* asintoto verticale, $x - 1 = 0$, se ne deduce che il denominatore stesso deve essere della forma $d(x + 1)^2 = 7(x + 1)^2$.

Rimangono da trovare i coefficienti b e c. Basta, per questo, utilizzare la condizione di passaggio per il punto $A\,(-2,\, -{}^{38}/_{7})$ e la condizione di annullamento della derivata prima per $x = -2$. Si ottiene facilmente il sistema

$$\begin{cases} 2x - 3b = 40 \\ -2b + c = 2 \end{cases}$$

La funzione richiesta è:

$$f(x) = \frac{-10x^2 + 36x + 74}{7(x + 1)^2}\,.$$

***

Esempio 26 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento sessione straord. 2006, problema 2)**.**
Si determinino i polinomi di 5° grado, nella variabile x, con coefficienti reali, i cui grafici, rappresentati in un piano riferito ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali Oxy, sono simmetrici rispetto all'origine O ed hanno un massimo relativo nel punto $(-2, {}^{64}/_{15})$ e che hanno come tangente inflessionale l'asse x.

La richiesta che il polinomio (che si può scrivere nella forma $p(x) = ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$) sia simmetrico rispetto all'origine, ha come conseguenza che deve avere solo le potenze dispari[3]. Si deve infatti avere

$$f(x) = -f(-x),\ \forall\, x \in \operatorname{dom}(f)\,;$$

dunque

$$\begin{gathered} ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = -(-ax^5 + bx^4 - cx^3 + dx^2 - ex + f \ \Rightarrow \\ \Rightarrow\ 2bx^4 + 2dx^2 + 2f = 0 \ \Rightarrow\ b = d = e = 0\,, \end{gathered}$$

dove l'ultima implicazione è una conseguenza del principio di identità dei polinomi.

Dunque $p(x) = ax^5 + cx^3 + ex$. La condizione sul punto di massimo comporta una condizione di passaggio e una condizione di annullamento della derivata prima. Si ottiene il seguente sistema.

$$\begin{cases} -32a - 8c - 2e = \dfrac{64}{15} \\ 80a + 12c + e = 0 \end{cases}$$

Si trova, abbastanza agevolmente[4],

$$\begin{cases} c = \dfrac{4}{15} - 8a \\ e = 16a - \dfrac{16}{5} \end{cases}$$

A questo punto si deve sfruttare la condizione sulla *tangente inflessionale*. Si tratta di una condizione tecnicamente non complessa ma teoricamente, almeno secondo me, non banale. La condizione data implica che ci deve essere un punto sul grafico della funzione, $(x_0, 0)$, in cui si annullano sia la derivata prima che la derivata seconda: di questo punto non è nota l'ascissa. Si possono fare i ragionamenti che seguono, e che portano alla stessa conclusione.

— Il polinomio ha sicuramente la radice $x = 0$. Se ci fosse un punto $x_0 \neq 0$ in cui la funzione ha per tangente inflessionale l'asse x, per simmetria la stessa proprietà dovrebbe valere anche per $-x_0$. Poichè una funzione come questa ha, con la sua tangente inflessionale, almeno 3 punti di intersezione coincidenti, ne seguirebbe che il polinomio dovrebbe avere $3+3+1 = 7$ radici, cosa palesemente impossibile, dato che il polinomio è di quinto grado. Se ne deduce che il punto di flesso richiesto deve essere necessariamente l'origine.

[3] È questo il motivo essenziale per cui una funzione simmetrica rispetto all'origine si chiama anche *dispari*. Si deve comunque ricordare che anche funzioni (non polinomiali!) che hanno potenze pari possono essere simmetriche rispetto all'origine, come per esempio la funzione

$$f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 + 1}\,.$$

Il problema del tipo di potenze presenti nelle funzioni dispari non si pone poi, ovviamente, per le funzioni non razionali. Per esempio sono dispari le funzioni seno, arcseno, arctangente, che non sono razionali.

[4] Devo ancora una volta osservare che francamente non capisco le inutili complicazioni di calcolo presenti in questo problema, seppure non a livello di altre, spesso presenti nei temi dell'esame di stato.

— La derivata del polinomio (che è di quarto grado), ha già due radici distinte: $x_1 = -2$, data dal problema, e $x_2 = 2$, per simmetria. In un punto di flesso a tangente orizzontale la derivata prima deve avere due radici coincidenti. Per un ragionamento analogo a quello del punto precedente se ne deduce che il punto di flesso richiesto deve coincidere con l'origine[5].

L'annullamento della derivata prima, per $x = 0$, porta subito a trovare il valore di a: $a = 1/5$. Il polinomio è ora completamente determinato.

[5] Secondo me, una risoluzione completa del problema doveva comportare un ragionamento del tipo di quelli qui proposti, ma non sono sicuro che essi siano alla portata dello studente medio, che, probabilmente, avrebbe subito posto il flesso nell'origine senza troppe discussioni, ma forse sono troppo pessimista...