Esaminiamo l'esame

Luciano Battaia*

Versione del 5 marzo 2007

Propongo, in questa nota, una serie di commenti ad alcune domande proposte nel tema di matematica dell'esame di stato di Liceo Scientifico.

È molto facile incorrere, sia nella formulazione di testi di compiti, che, ancor di più, nella redazione di appunti o libri di testo, in sviste ed errori, e non intendo chiamarmi fuori da questa "tradizione", ma, forse, la cosa è un po' più grave in occasione di temi d'esame a valenza nazionale e che poi hanno, ovviamente, una enorme diffusione su tutti i testi del settore.

In ogni caso scopo principale di queste pagine è quello di "sfatare il mito" dell'esame di stato, invitando lo studente ad affrontare questa prova con i necessari impegno, serietà e preparazione, ma senza troppi patemi d'animo.

Non sono riportati qui i testi completi degli esami di stato, né le soluzioni, ma solo quelle parti che ho ritenuto utili per raggiungere lo scopo indicato.

Esempio 1 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento, sessione ordinaria 2005, quesito 10). *Si dimostri, calcolandone la derivata, che la funzione*

$$f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \frac{x-1}{x+1}$$

è costante, indi si calcoli il valore di tale costante.

Inizio questa breve rassegna con quella che, secondo me, è una delle sviste più clamorose nella storia delle prove di matematica agli esami di stato di liceo scientifico.

È abbastanza facile calcolare la derivata della funzione assegnata, provando che essa si annulla in tutto il suo dominio naturale, cioè in $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, ma questo non permette affatto di concludere con la costanza della funzione. Il risultato teorico che dovrebbe essere applicato in questo è uno dei corollari del teorema di Lagrange, per la validità del quale occorre però che l'insieme in cui la derivata si annulla sia un *intervallo* (di qualunque tipo), cosa che non succede nel caso in esame.

---
*http://www.batmath.it

Un esame ulteriore della funzione permette di concludere che, in effetti, essa *non* è costante: basta per esempio calcolarne i limiti a $\pm\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{\pi}{4}\,, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\frac{3\pi}{4}\,.$$

La conclusione corretta è la seguente:

> La funzione in esame ha derivata nulla in tutto il suo dominio, pertanto essa sarà costante, ma *non* nel dominio, bensì in qualunque intervallo interamente contenuto nel dominio; in questo caso, per esempio, negli intervalli $]-\infty,-1[$ e $]-1,+\infty[$, che sono i due intervalli "massimali" contenuti nel dominio.

Una svista come questa stupisce, perché in moltissimi testi proprio controesempi basati sulla funzione arcotangente sono utilizzati per far capire al lettore come l'ipotesi che l'annullarsi della derivata non sia sufficiente, di per sè, a garantire che una funzione sia costante. Basti, per tutti, citare la funzione

$$g(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\,.$$

La cosa è, secondo me, ancora più sorprendente se si tiene conto che qualche anno prima (esame 2001, PNI, quesito 4), era stata proposta una domanda dal contenuto analogo, riguardante la funzione $\arcsin x + \arccos x$, questa volta definita su un intervallo e quindi costante in quanto derivabile con derivata nulla. Nello stesso anno, nel corso di ordinamento, il quesito 5 chiedeva esplicitamente di verificare che se una funzione ha derivata nulla in un intervallo, allora essa è costante sull'intervallo. Un problema sostanzialmente analogo era poi stato proposto, in maniera corretta, anche nel 2004 (corso di ordinamento, quesito 6). Questa insistenza dimostra l'importanza attribuita, giustamente, a questo problema, e allora perché cadere in uno svarione come questo?

Esempio 2 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento, sessione staord. 2005, quesito 7). *Calcolare la derivata, rispetto a x, della funzione:*

$$f(x) = \int_{-x}^{2x} \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t\,.$$

Evidentemente il 2005 deve essere stato un *annus horribilis* per gli estensori dei testi degli esami di stato. Pensavo infatti che l'errore citato nell'esempio precedente, e di cui tutti i giornali parlarono a suo tempo (seppure qualche volta con un certo ritardo: anche alcuni dei solutori ufficiali dei giornali non si accorsero dell'errore. . .), avesse posto in allerta gli esperti che preparano i compiti. Non avevo ancora scoperto però che, nella sessione straordinaria dello stesso anno (quindi a distanza di poco più di 2 mesi!), un altro errore decisamente madornale (e molto grave) era in agguato. Questo volta i riflettori dei media non si sono accesi, in quanto la sessione straordinaria impegna, ogni anno, un troppo esiguo numero di studenti perché qualunque evento ad essa connesso possa "fare notizia".

Il problema è che la funzione proposta nel quesito ha come dominio l'insieme vuoto e quindi il problema della sua derivabilità non si pone nemmeno. Esaminiamo i dettagli.

La funzione integranda ha come dominio naturale l'insieme dei reali privato dei punti $t = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. In particolare non appartiene al dominio della funzione integranda il punto $t = 0$, in corrispondenza del quale essa ha un asintoto verticale, tendendo a $+\infty$ a destra di zero e a $-\infty$ a sinistra di zero. Non ha dunque alcun senso il calcolo dell'integrale di Riemann, per una funzione di questo tipo, in un intervallo contenente lo zero[1].

Ora gli estremi dell'integrale proposto nel quesito sono $-x$ e $2x$. Dunque, in ogni caso, un intervallo comprendente l'origine! Se ne deduce che la funzione $1/\sin t$ non è integrabile sull'intervallo proposto e che quindi la funzione $f(x)$ non è definita per nessun x.

A tutt'oggi (27 febbraio 2007) ho trovato una sola soluzione pubblicata di questo quesito, e nemmeno in quel caso il solutore si è accorto dell'errore!

Esempio 3 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso sperimentale sessione ordinaria 2002, quesito 9)**.** *Trovare $f(4)$, sapendo che*

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = x\cos(\pi x)\,.$$

L'errore presente in questo quesito è, secondo me, uno dei peggiori, perché si tratta di uno di quegli errori logici molto difficili da scoprire (e pertanto ancora più gravi). Come già segnalato è gravissimo poi, a parere mio, il fatto che una cosa del genere succeda agli esami di stato: gli argomenti proposti in queste occasioni, infatti, diventano poi modello per la preparazione di esercizi sui testi in uso nelle scuole medie superiori, e se già chi porta la lanterna barcolla, immaginiamo poi cosa può succedere a chi si lascia guidare. In effetti nessuna delle numerose soluzioni che ho trovato in rete alla data di pubblicazione del presente fascicolo riporta la segnalazione dell'errore.

Il problema è che l'integrale di Riemann di una funzione non dipende dai valori che la funzione integranda assume su un insieme finito di punti (in realtà nemmeno su opportuni insiemi infiniti, ma la cosa esula dal nostro contesto). Pertanto non si può affermare assolutamente nulla sul valore della funzione nel punto 4.

Per essere più precisi consideriamo la funzione

$$g(x) = \begin{cases} \cos(\pi x) - \pi x\sin(\pi x) & \text{se} \quad x \neq 4 \\ \text{qualsiasi numero reale} & \text{se} \quad x = 4 \end{cases}\,.$$

Essa soddisfa interamente le ipotesi del testo, ma il suo valore in 4 non è assolutamente determinabile!!

Esempio 4 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso sperimentale, sessione suppletiva 2005, quesito 7)**.** *Spiegare in maniera esauriente perché una funzione reale di variabile reale integrabile in un intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, non necessariamente ammette primitiva in $[a, b]$.*

Il problema richiede, nella sostanza, di distinguere tra il concetto di primitiva e quello di integrale: il nocciolo della questione è legato al fatto che una funzione che abbia discontinuità

[1]Potrebbe avere senso il calcolo di un integrale improprio, che comunque non sarebbe convergente come si può facilmente verificare tenendo conto che

$$\int \frac{1}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right| + c\,.$$

Ma anche se l'integrale improprio convergesse, l'applicabilità del teorema fondamentale del calcolo, essenziale per ottenere le conclusioni richieste dal quesito, rimarrebbe tutta da provare. . . !

a salto in un intervallo, non può avere primitive nell'intervallo (teorema di Darboux). Si tratta, a parer mio, di un problema che non viene abitualmente affrontato nella scuola media superiore, dove si considera, per lo più, il problema dell'integrale di Riemann solo per funzioni continue. Se questo esercizio vuole essere uno stimolo ad "ampliare gli orizzonti", ben venga, ma perchè usare gli studenti candidati alla maturità come cavie?

Inoltre vorrei segnalare che, se gli estensori dei temi ministeriali cominciano a fare i preziosi nella formulazione dei quesiti, sarebbe bene che tenessero anche conto che di definizioni di primitive non c'è solo quella tradizionale (si dice "primitiva di una funzione f" una funzione F che abbia come derivata f in ogni punto del comune dominio), ma anche altre, che consentono eccezioni alla coincidenza tra la derivata di F ed f: in questo caso provare che una funzione integrabile può non avere primitive sarebbe decisamente più difficile, e sicuramente non alla portata di uno studente candidato all'esame di stato.

Esempio 5 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso sperimentale, sessione ordinaria 2004, quesito 8).
Si trovino due numeri reali a e b, $a \neq b$, che abbiano somma e prodotto uguali.

Nessun commento, solo una domanda: Ma che cosa si voleva accertare con un quesito come questo?

Uno dei migliori studenti delle mie classi si è, giustamente, preoccupato di una domanda del genere: "forse che mi vogliano fregare con uno dei soliti trucchi dei prof. di matematica?" Non posso che dargli ragione.

Esempio 6 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento, sessione ordinaria 1977, quesito 3).
Data la funzione $y = a\sin x + b\cos x$, si determinino i coefficienti a, b in modo che per $x = {}^{2\pi}/_{3}$ sia $y = 1$ e che i valori estremanti di y siano -2 e 2. Se ne disegni il grafico nell'intervallo $0 \leq x \leq 2\pi$. Posto $y = c\sin(x+\varphi)$, si calcolino c e φ in modo che questa funzione coincida con quella assegnata.

È nomenclatura consolidata che si chiamino *estremanti* le ascisse degli eventuali punti di massimo o minimo, mentre le corrispondenti ordinate si chiamano *estremi*. La nomenclatura utilizzata non è perciò ortodossa. Ma non è tutto qui. Dal testo parrebbe risultare evidente che di funzioni soddisfacenti le ipotesi ce ne sia una sola, e invece ce ne sono due...

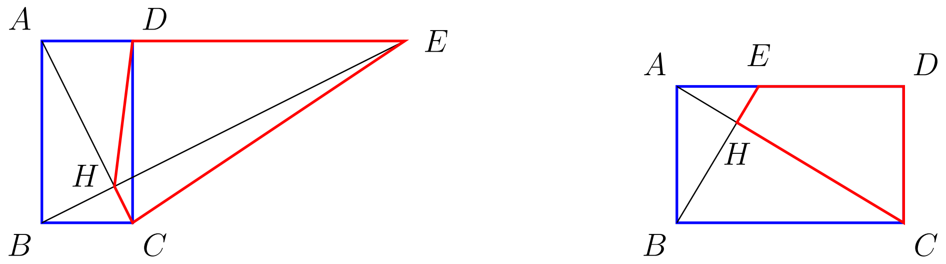
Esempio 7 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento, sessione suppletiva 1994, quesito 2).
Considerato il rettangolo $ABCD$, il cui lato AB è lungo a, condurre per B la perpendicolare alla retta AC e chiamare H ed E i punti in cui essa seca le rette AC e AD nell'ordine.

Condurre quindi per H la perpendicolare al piano della figura e su di essa prendere un punto P tale che:

$$\overline{HP} = 6\overline{AE}\,.$$

Esprimere il volume della piramide avente per vertice il punto P e per base il quadrilatero $HDEC$ in funzione della lunghezza x del segmento BH...

Purtroppo i dati della traccia possono dar luogo a due costruzioni sostanzialmente diverse, come si può vedere dalle figure che seguono, in cui abbiamo tracciato solo la parte di figura relativa alla base della piramide.



Come si vede subito, se uno costruisce una figura come quella di destra, il quadrilatero $HDEC$, con i vertici presi nell'ordine scritto, dovrebbe venire addirittura intrecciato, e questo è l'unico indizio che fa propendere per la figura di sinistra anziché quella di destra, ma perchè non dirlo esplicitamente? Il problema grosso è che, se poi si prosegue con i calcoli, non accorgendosi del problema, si perviene a situazioni assolutamente incompatibili con la restante parte del problema. Non vorrei essermi trovato nei panni di quegli studenti che, avendo scelto il quesito, si sono ritrovati in questa difficoltà!

Un'ultima osservazione. In realtà la piramide non centra praticamente nulla con la risoluzione del problema ed è qui inserita, a mio avviso, solo per controllare se lo studente ricorda la formula relativa al volume di una piramide: anche se si tratta di una formula notevole (non foss'altro che per la sua importanza storica, in quanto rappresenta probabilmente il più importante risultato della matematica egizia), non credo valesse la pena di complicare inutilmente la risoluzione del problema, con una difficoltà puramente formale (mi chiedo quanto tempo avrà perso il malcapitato studente che si è trovato a sostenere questa prova d'esame solo per "disegnare" una strana piramide che col problema centra poco o niente).

Esempio 8 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento, sessione ordinaria 1998, quesito 1)**.**
In un piano, riferito ad un sistema cartesiano ortogonale Oxy, sono assegnate le curve grafico delle funzioni

$$x \mapsto f(x) = ax^3 + 3x + b\,,$$

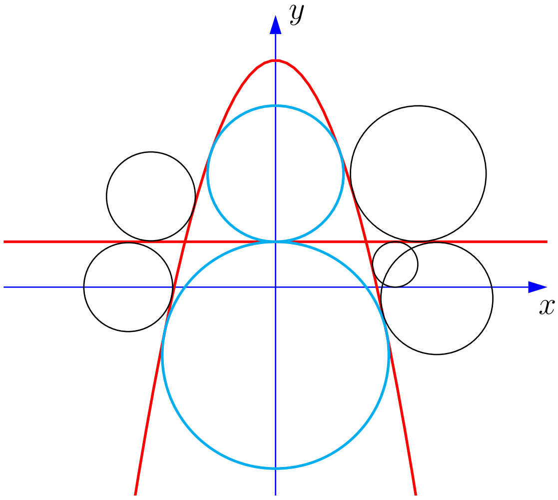
dove a e b sono parametri reali, con $a \neq 0$.

- *Determinare i valori di a per i quali queste curve hanno un punto di massimo e uno di minimo relativi, e quelli per i quali non hanno né massimi né minimi relativi.*
- *Calcolare i valori di a e b in modo che la curva γ corrispondente abbia un massimo relativo uguale a 0 e sechi l'asse y nel punto di ascissa $-2\sqrt{2}$.*

La ricerca dei valori di a e b conduce ad un'equazione di terzo grado con coefficienti non razionali (vedi per esempio la soluzione proposta in *Luciano Battaia*, Funzioni con parametri, `http://www.batmath.it`), a mio avviso assolutamente improponibile in un esame di stato di Liceo Scientifico In realtà il problema poteva essere risolto con un escamotage, utilizzando dati forniti successivamente nel testo del problema, ma non mi pare questo un atteggiamento corretto in un tema d'esame.

Esempio 9 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento, sessione ordinaria 1973, quesito 1)**.**
Si scrivano le equazioni delle due circonferenze $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ tangenti alla parabola di equazione $y = 5 - x^2$ e alla retta di equazione $y = 1$ e si indichino con r' e r'' i rispettivi raggi. . .

Il problema è che di circonferenze come quelle richieste ce ne sono addirittura infinite, come mostra la figura che segue. È molto probabile che l'estensore del quesito avesse pensato alle due tangenti internamente alla parabola (anche perché le altre sono tutt'altro che banali da trovare), ma perché non dirlo?



Esempio 10 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento, sessione suppletiva 2000, quesito 2). *Si determinino i valori delle costanti reali* m *ed* n *in modo che:*

- $\int_0^1 e^{mx+n}\,dx = \frac{e^n}{m}$;
- $\int_0^2 e^{mx+n}\,dx = 2\frac{e^n}{m}$.

È facile provare che di soluzioni del problema posto ce ne sono infinite, precisamente:

$$\begin{cases} m = \ln 2 \\ n \in \mathbb{R} \end{cases} .$$

Non sarebbe stato più corretto formulare il problema in modo da non creare inutile panico nei candidati?

Esempio 11 (Esame di Stato di Liceo Scient., corso di ordinamento, sessione ordinaria 1999, quesito 2). *In un piano ...*

...

stabilire per quali valore di r *la maggiore di tali aree è uguale a*

$$\frac{32 + 22\pi - 15\sqrt{3}}{3}\,\mathrm{cm}^2 .$$

Si tratta di un classico "errore di calcolo". Il valore fornito porta a trovare un r dato da:

$$r = 2\sqrt{\frac{32 + 22\pi - 15\sqrt{3}}{32 + 10\pi - 15\sqrt{3}}} .$$

È abbastanza facile immaginare il panico che deve aver preso lo studente che, al termine di una serie di calcoli, si è trovato con un risultato che gli pareva assolutamente astruso. Bastava aver messo un 10π al posto di 22π nel testo, per ottenere un risultato decente ($r = 2$).