Soluzioni del Test OFA del 18/09/2015

Materiale prelevato da http://www.batmath.it

Versione del 19 settembre 2015

Questo fascicolo contiene la risoluzione dei quesiti proposti nel test OFA del 18 settembre 2015 presso il campus di Treviso dell'Università Ca' Foscari di Venezia, per il corso di laurea in Commercio Estero.

In molti casi la risoluzione presentata è molto dettagliata (con osservazioni e commenti non strettamente necessari per la risoluzione dei quesiti): lo scopo di questo fascicoletto è in realtà principalmente didattico e si vogliono evidenziare quali sono le tecniche utilizzate, anche servendosi di un linguaggio spesso informale.

Nelle diverse versioni del test erano presenti limitate varianti rispetto ai quesiti qui presentati: nulla cambia nella sostanza delle strategie da utilizzare.

Quesito 1. Se Se a, b sono numeri reali non nulli tali che $a < b$ allora si ha che

1. $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.
2. $\dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$.
3. $a^2 \leq b^2$.
4. $a^3 \leq b^3$.

La risposta corretta è la numero 4: tra quelle proposte l'unica "manipolazione" sempre consentita in una diseguaglianza è l'elevazione al cubo, che non modifica il valore di verità della diseguaglianza originale.

Si noti anche che mentre il testo propone la disuguaglianza stretta $a < b$, la risposta corretta 4 propone la disuguaglianza larga $a^3 \leq b^3$. Si tenga ben presente che

$$a^3 \leq b^3 \quad \text{equivale a} \quad a^3 < b^3 \vee a^3 = b^3.$$

Basta che sia vera una delle due (in questo caso la prima) affinché la disuguaglianza larga sia vera.

Per provare che le altre risposte sono errate si possono portare dei controesempi:

— da $2 < 3$ non segue che $1/2 < 1/3$, e questo prova che la risposta 1 è errata;
— da $-2 < 3$ non segue che $-1/2 > 1/3$, e questo prova che la risposta 2 è errata;
— da $-5 < 3$ non segue $25 \leq 9$, e questo prova che la risposta 3 è errata.

È opportuno segnalare che dire "le risposte 1, 2 e 3 sono errate" non significa dire che non possono essere vere per particolari valori di a e b. Per esempio:

— se $a = -2$ e $b = 3$, allora $1/a < 1/b$, conformemente alla risposta 1;
— se $a = 2$ e $b = 3$, allora $1/a > 1/b$, conformemente alla risposta 2;
— se $a = 2$ e $b = 3$, allora $a^2 \leq b^2$, conformemente alla risposta 3.

Si presti particolare attenzione a questo fatto: per provare che una certa proprietà è valida non è sufficiente portare degli esempi in cui vale, bisogna provarne la validità in tutti i casi possibili. Viceversa per provarne la non validità è sufficiente portare un controesempio, come abbiamo fatto sopra.

Quesito 2. Fissato nel piano un riferimento cartesiano $0xy$, quale delle seguenti è l'equazione di una circonferenza?

1. $x^2 - 3x + y^2 - 5y - 1 = 0$.
2. $x^2 + y^2 - 10xy - 1 = 0$.
3. $x^2 + y^2 + 4 = 0$.
4. $(x-1)^2 - (y-2)^2 - 1 = 0$.

La risposta corretta è la numero 1: è la sola equazione che rispetta tutti i requisiti per potere rappresentare una circonferenza. Infatti una circonferenza ha sempre un'equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

purché sia verificata la condizione

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c \geq 0.$$

L'equazione proposta si chiama anche "forma canonica" dell'equazione di una circonferenza.

Dunque la seconda risposta è errata per la presenza del "termine misto", cioè contenente il prodotto "xy".

La terza risposta è errata perché

$$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 0 + 0 - 4 < 0.$$

Per controllare che la quarta risposta è errata si può osservare che, svolgendo i calcoli, l'equazione assume la forma

$$x^2 - y^2 + \cdots = 0$$

che contrasta con la forma canonica sopra proposta. Si sarebbe anche potuto osservare, più semplicemente, che una circonferenza si può anche scrivere, oltre che nella forma canonica sopra indicata, nella forma

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2, \quad \text{ovvero} \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0,$$

dove (x_0, y_0) è il centro e r è il raggio. L'equazione proposta contrasta con questo modello per i segni dei tre addendi. Quest'ultima forma dell'equazione di una circonferenza (che traduce in formule la proprietà geometrica che una circonferenza è il luogo dei punti del piano che hanno distanza r assegnata da un punto (x_0, y_0)) è particolarmente utile per scrivere l'equazione di una circonferenza dati centro e raggio.

Quesito 3. Se il raggio di un cerchio aumenta del 10%, allora l'area del cerchio aumenta del:

1. 10%.
2. 11%.
3. 21%.
4. 20%.

La risposta corretta è la numero 3. Per verificarlo si può fare un ragionamento elementare (spesso utile quando si parla di percentuali). Sia r il raggio originale del cerchio e r' il raggio dopo l'aumento del 10%. Si ha

$$r' = r + \frac{10}{100} r = r + 0.1r = 1.1r.$$

L'area iniziale è
$$\mathcal{A} = \pi r^2,$$
mentre l'area finale è
$$\mathcal{A}' = \pi(r')^2 = \pi(1.1r)^2 = \pi 1.21 r^2 = 1.21\mathcal{A}.$$
L'area è dunque aumentata del 21% e la risposta esatta è la numero 3.

Se l'aumento del raggio fosse stato del 20%, ripetendo i calcoli sopra riportati avremmo avuto:
$$r' = r + \frac{20}{100} r = r + 0.2r = 1.2r.$$
L'area iniziale sarebbe dunque stata, come prima,
$$\mathcal{A} = \pi r^2,$$
mentre l'area finale sarebbe diventata
$$\mathcal{A}' = \pi(r')^2 = \pi(1.2r)^2 = \pi 1.44 r^2 = 1.44\mathcal{A}.$$
L'area sarebbe dunque aumentata del 44%.

Quesito 4. I punti di intersezione tra le curve $y = \sqrt{x}$ e $y = x^2$ sono

1. $0, 1$.
2. $(0,0), (1,1)$.
3. $(-1,-1), (0,1), (1,1)$.
4. $(-1,1), (0,1), (1,1)$.

La prima risposta è chiaramente errata, anzi priva di senso: i punti di intersezione devono essere coppie di numeri reali, non numeri reali.

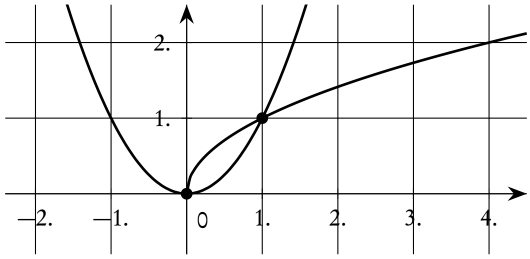
Per controllare quale delle altre risposte è corretta si può procedere in vari modi: la via più elementare (anche se la meno elegante) è quella di sostituire le coppie date nelle due equazioni, controllando quali coppie soddisfano entrambe le equazioni. Se chiamiamo C_1 e C_2, rispettivamente le due curve abbiamo quanto segue.

— $(0,0)$ sta sia in C_1 che in C_2.
— $(1,1)$ sta sia in C_1 che in C_2.
— $(-1,-1)$ non sta né in C_1 né in C_2.
— $(0,1)$ non sta né in C_1 né in C_2.
— $(-1,1)$ sta in C_2 ma non in C_1.

Se ne deduce subito che la risposta esatta è la 2.

Si poteva procedere anche a risolvere il sistema tra le equazioni delle due curve:
$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases}.$$
Sostituendo la y dalla prima nella seconda si ottiene l'equazione (detta "equazione risolvente"):
$$\sqrt{x} = x^2.$$
Dopo aver posto la condizione di realtà del radicale ($x \geq 0$), si eleva al quadrato ottenendo
$$x = x^4 \quad \Rightarrow \quad x^4 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x(x^3 - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee x^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee x = 1.$$
Sostituendo i valori trovati per x in una delle due equazioni si trovano i corrispondenti valori di y e, come prima, i punti $(0,0)$ e $(1,1)$.

Ancora più semplicemente si sarebbero potuti tracciare i grafici delle due funzioni:



Si conclude immediatamente come sopra.

Quesito 5. L'insieme delle soluzioni della disequazione $(x+1)\,2^{x^2-1} \geq 0$ è:

1. $\{-1\}$.
2. $\emptyset$
3. $[-1,+\infty[$.
4. $\{1\}$.

Il modo più sicuro per risolvere questa disequazione è di osservare che si tratta di un prodotto tra due fattori e che il testo chiede di trovare quando il prodotto stesso è positivo o nullo: si può determinare il segno di ciascuno dei due fattori e poi il segno del prodotto utilizzando un grafico di segno (o grafico di tipo "+/−").

Conviene cominciare con l'osservare che non occorre imporre alcuna condizione perché la disequazione abbia senso. Dopodiché:

I. il primo fattore è
   - maggiore di 0 per $x > -1$,
   - uguale a 0 per $x = -1$,
   - minore di 0 per $x < -1$;

II. il secondo fattore è sempre strettamente maggiore di 0 (si tratta di una proprietà fondamentale degli esponenziali).

Si può tracciare il seguente grafico di segno, dove abbiamo segnato con un "+" gli intervalli o punti dove ciascun fattore è maggiore di 0, con uno"0" i punti dove ciascun fattore si annulla, con un "−" gli intervalli o punti dove ciascun fattore è negativo.

+/−	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		−	0	+	
2^{x^2-1}		+	+	+	
Prodotto		−	0	+	

Se ne deduce che la disequazione è verificata per $x \geq -1$ o, detto in altro modo, in $[-1,+\infty[$. La risposta corretta è dunque la 3.

Si poteva anche osservare che il fattore 2^{x^2-1} è strettamente maggiore di 0 e quindi può essere semplificato, dividendo ambo i membri per questo fattore:

$$(x+1)\,2^{x^2-1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{(x+1)2^{x^2-1}}{2^{x^2-1}} \geq \frac{0}{2^{x^2-1}} \quad \Rightarrow \quad x+1 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -1,$$

che è la conclusione tratta sopra, molto più velocemente. Si deve infatti ricordare che si possono moltiplicare o dividere ambo i membri di una disequazione per una stessa quantità *soltanto* se essa è strettamente positiva, e non solo quando è costante, anche quando contiene la x. Tuttavia, anche se questo fatto può velocizzare i calcoli, la costruzione di una completa tavola di segno non è molto più complessa e consente spesso di evitare grossolani errori.

Quesito 6. La somma di due numeri naturali è pari

1. se e solo se entrambi i numeri sono pari.
2. se sono entrambi dispari.
3. se almeno uno dei due è dispari.
4. se almeno uno dei due è pari.

La prima risposta è errata, per la presenza del "se e solo se": infatti se due numeri sono pari la somma è pari, ma se la somma è pari non è detto che i due numeri siano pari (potrebbero infatti essere entrambi dispari, come recita la risposta 2).

La seconda risposta è quella corretta: la somma di due numeri dispari è sicuramente pari. Si noti che qui, a differenza della risposta 1, non è presente il "solo se".

La terza e la quarta risposta sono errate: se uno dei due numeri è pari e l'altro dispari, la somma è dispari.

Quesito 7. L' equazione $\log_{\frac{1}{5}}(x) = \log_5(x)$ è verificata

1. per $x = 5$.
2. per nessun x.
3. per $x = 0$.
4. per $x = 1$.

Il modo più semplice per controllare la validità di una tra le risposte 1, 3, 4 è di provare a sostituire il valore proposto della x.

1. Per $x = 5$ si ottiene $\log_{\frac{1}{5}}(5) = -1$ (l'esponente da dare a $1/5$ per ottenere 5 è proprio -1), mentre $\log_5(5) = 1$ (l'esponente da dare a 5 per ottenere 5 è, ovviamente, 1). Dunque la risposta 1 è errata.
2. Il valore $x = 0$ *non* può essere sostituito nella equazione data, in quanto l'argomento di un logaritmo, in qualunque base, deve essere strettamente maggiore di 0.
3. Per $x = 1$ si ottiene $\log_{\frac{1}{5}}(1) = 0$ e $\log_5(1) = 0$: qualunque sia la base a, positiva e diversa da 1 come deve essere per i logaritmi, $a^0 = 1$. Detto in altre parole il logaritmo di 1 in una base qualunque (lo ripetiamo, positiva e diversa da 1) vale sempre 0. Dunque la risposta 4 è corretta.

Avendo verificato che la risposta 4 è corretta, e sapendo che nel test una sola fra le risposte è corretta, possiamo concludere che la risposta 2 è errata, senza bisogno di ulteriori considerazioni.

Un altro modo per risolvere l'equazione data, dopo aver posto la condizione $x > 0$ che esclude, come già osservato, la risposta 3 è di cambiare la base del primo membro:

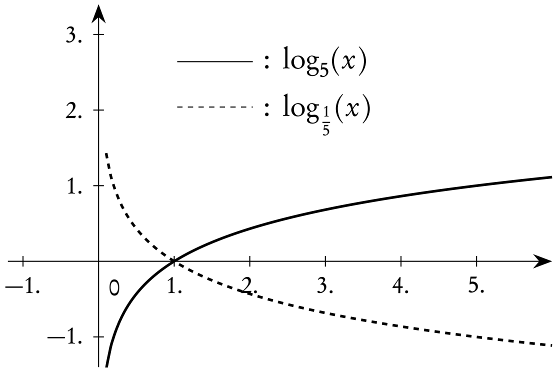
$$\log_{\frac{1}{5}}(x) = \frac{\log_5(x)}{\log_5(1/5)} = \frac{\log_5(x)}{-1} = -\log_5(x).$$

L'equazione proposta diventa

$$-\log_5(x) = \log_5(x) \quad \Rightarrow \quad 2\log_5(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad \log_5(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1,$$

e si ritrova quanto già sopra affermato.

Il modo più elegante per trattare questo problema è quello di tracciare i due grafici (elementari) delle funzioni proposte a primo e secondo membro.



Si trova ancora facilmente che $x = 1$ è l'unica soluzione dell'equazione proposta.

Quesito 8. L'intersezione del grafico della funzione $y = |2x - 1|$ con l'asse $x = 0$ è

1. $y = 1$.
2. $y = 1$ e $y = -1$.
3. $\emptyset$.
4. $y = -1$.

Il modo più semplice per risolvere il quesito è quello di considerare il sistema tra le due equazioni date:

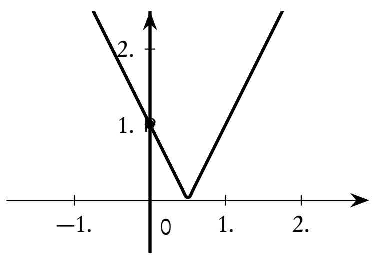
$$\begin{cases} y = |2x - 1| \\ x = 0 \end{cases} .$$

Sostituendo $x = 0$ dalla seconda nella prima equazione si ottiene

$$y = |0 - 1| = |-1| = 1.$$

La risposta corretta è dunque la numero 1.

Anche qui una soluzione più elegante consiste nel tracciare il grafico delle due funzioni (la seconda è l'asse delle ordinate).



L'unico punto comune è il punto $(0, 1)$ che ha ordinata 1: si ritrova, naturalmente, il risultato già indicato.