Tema di Analisi I, 2° modulo, 21/06/2010

Luciano Battaia[(*)]

Università di Udine e Università di Trieste, Sede di Pordenone

Esercizio 1. Sono dati il piano π di equazione $3x - 2y - z + 1 = 0$ e la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = 7 - t \\ z = 1 - 4t \end{cases}.$$

Si chiede di determinare la retta s, proiezione ortogonale di r su π.

Detti poi P il punto di r corrispondente al valore 0 del parametro e Q la sua proiezione ortogonale su π, si chiede si trovare l'equazione della sfera avente diametro PQ.

Risoluzione. La retta r e il piano π sono paralleli, come si verifica subito cercando le loro eventuali intersezioni:

$$r \cap \pi\colon 3(-2t) - 2(7 - t) - (1 - 4t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad -14 = 0\,.$$

Il punto P ha coordinate $(0, 7, 1)$ e il vettore $\vec{w} = (3, -2, -1)$ risulta perpendicolare al piano: la retta p, di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 7 - 2t \\ z = 1 - t \end{cases},$$

passa per P ed è ortogonale al piano π. Il punto Q si può trovare come intersezione tra p e π:

$$3(3t) - 2(7 - 2t) - (1 - t) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 1 \quad \Rightarrow \quad Q = (3, 5, 0)\,.$$

La proiezione ortogonale s di r su π è allora semplicemente la retta per Q e parallela ad r:

$$\begin{cases} x = 3 - 2t \\ y = 5 - t \\ z = -4t \end{cases}.$$

Il centro C della sfera è il punto medio M del segmento PQ, mentre il raggio è $\overline{CP}$. Si trova facilmente

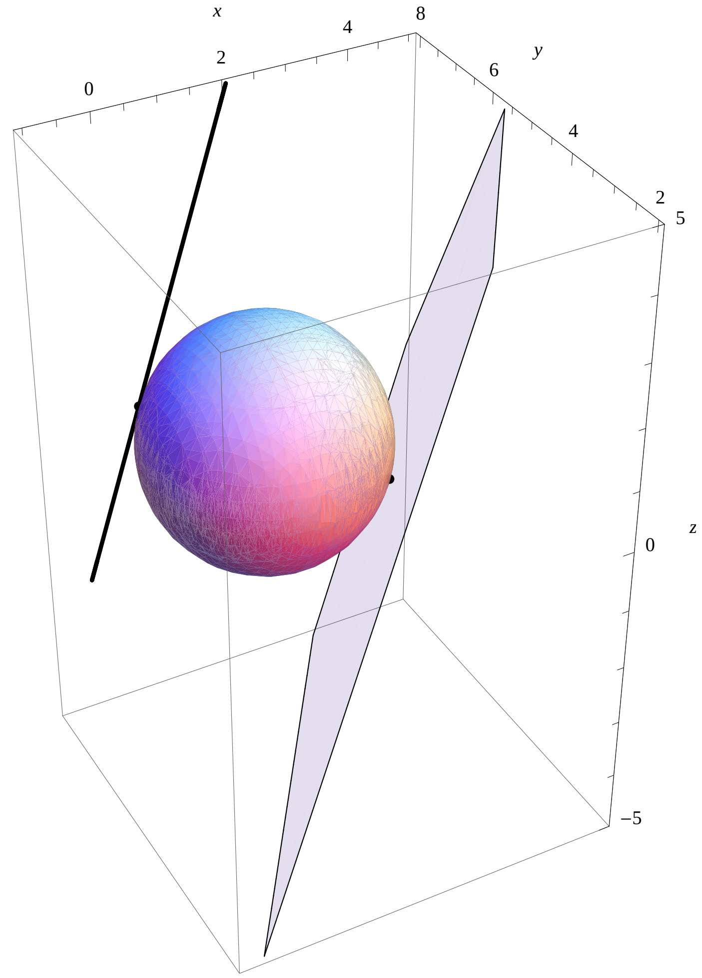
$$M = \left(\frac{3}{2}, 6, \frac{1}{2}\right), \quad r = \sqrt{\frac{7}{2}}\,.$$

L'equazione della sfera richiesta è ora immediata:

$$(x - x_c)^2 + (y - t_c)^2 + (z - z_c)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 - 3x - 12y - z - 35 = 0$$

La figura seguente, ottenuta con *Mathematica*, illustra la situazione.

*http://www.batmath.it



Esercizio 2. Calcolare le derivate parziali e la derivata direzionale rispetto alla direzione orientata individuata dal vettore $\vec{u} = (2, 2)$, nell'origine, per la funzione data da

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^4 + y^2}, & \text{se} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{se} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} .$$

Detto $\vec{v}$ il versore di $\vec{u}$, controllare se vale oppure no la formula

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0, 0) = \nabla f(0, 0) \cdot \vec{v}$$

giustificando il risultato.

Risoluzione. Conviene usare direttamente la definizione di derivate parziali:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0 + h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0, \quad f'_y(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, 0 + h) - f(0, 0)}{h} = 0 .$$

Il versore di $\vec{u}$ è dato da

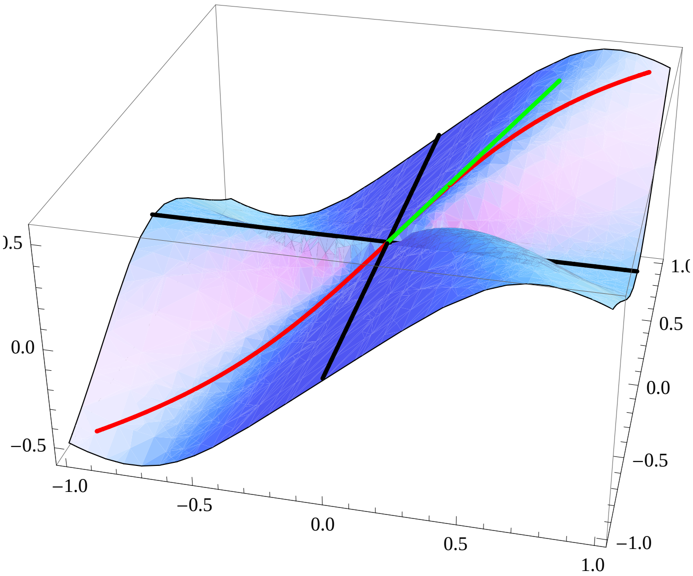
$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) .$$

Anche per calcolare la derivata direzionale usiamo la definizione:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = \lim_{h \to 0} \frac{f\left(0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} h, 0 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) h - f(0, 0)}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Dunque la formula indicata non è applicabile, e ciò è dovuto al fatto che la funzione non è differenziabile nell'origine, anzi la non validità della formula indicata è uno dei modi più comuni per controllare la non differenziabilità di una funzione.

La figura seguente, ottenuta con *Mathematica*, illustra la situazione.



Esercizio 3. Si calcoli il polinomio di Taylor di ordine 3, di punto iniziale 0 (polinomio di Mac Laurin), della funzione definita da

$$f(x) = \int_x^0 \left(\int_0^t \mathrm{e}^{-s^3} \, \mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t$$

Risoluzione. Poniamo

$$g(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-s^3} \, \mathrm{d}s \,,$$

da cui

$$f(x) = \int_x^0 g(t) \, \mathrm{d}t = -\int_0^x g(t) \, \mathrm{d}t$$

Per rispondere alla domanda dobbiamo calcolare $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$, $f'''(0)$. Si ha, intanto,

$$f(0) = \int_0^0 g(t) \, \mathrm{d}t = 0 \,.$$

Si ha poi

$$f'(x) = -g(x) = -\int_0^x \mathrm{e}^{-s^3} \, \mathrm{d}s \quad \Rightarrow \quad f'(0) = -g(0) = 0 \,;$$

$$f''(x) = -g'(x) = -\mathrm{e}^{-x^3} \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -g'(0) = -1 \,;$$

$$f''(x) = -g''(x) = 3x^2 \mathrm{e}^{-x^3} \quad \Rightarrow \quad f'''(0) = -g''(0) = 0 \,.$$

Per il polinomio di Taylor richiesto si ha allora:

$$T(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}\,x^3 = -\frac{x^2}{2}\,.$$

****

Per chi è interessato allo studio di *Mathematica*, riportiamo i codici usati per ottenere le due figure.

```
Show[
 Plot3D[
  3 x - 2 y + 1, {x, -1, 5}, {y, 2, 8}, BoxRatios -> {6, 6, 10},
  AxesLabel -> {x, y, z}, Mesh -> None, PlotStyle -> Opacity[0.4],
  PlotRange -> {-5, 5}, ClippingStyle -> None,
  ViewPoint -> {-1.3, -2.4, 2}
  ],
 ParametricPlot3D[
  {-2 t, 7 - t, 1 - 4 t}, {t, -5, 15}, PlotStyle -> Thickness[Large]
  ],
 Graphics3D[
  {PointSize[Medium], Point[{{0, 7, 1}, {3, 5, 0}}]}
  ],
 ContourPlot3D[
  x^2 + y^2 + z^2 - 3 x - 12 y - z + 35 == 0, {x, -1, 9}, {y, -1,
   9}, {z, -20, 50}, Mesh -> None, PlotPoints -> 50
  ]
 ]


Show[
 Plot3D[
  x y^2/(x^4 + y^2), {x, -1, 1 }, {y, -1, 1}, BoxRatios -> {2, 2, 1},
  Mesh -> None
  ],
 ParametricPlot3D[
  {{t, 0, 0.01}, {0, t, 0.01}}, {t, -1, 1},
  PlotStyle -> Thickness[Large]
  ],
 ParametricPlot3D[
  {t/Sqrt[2], t/Sqrt[2], Sqrt[2] t/(t^2 + 2) + 0.01}, {t, -1.3, 1.3},
  PlotStyle -> {Thickness[Large], {Black, Black, Red}}
  ],
 ParametricPlot3D[
  {t/Sqrt[2], t/Sqrt[2], t/Sqrt[2] + 0.01}, {t, 0, 1},
  PlotStyle -> {Thickness[Large], Green}
  ]
 ]
```