Tema di Analisi I, 2° modulo, $17/02/2010$

Luciano Battaia[(*)]

Università di Udine e Università di Trieste, Sede di Pordenone

Esercizio 1. Sono[(1)] date le rette

$$\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 3 + t \\ z = -t \end{cases} \qquad \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ x + y - z - 2 = 0 \end{cases} .$$

Si chiede:

1. di verificare che sono incidenti e di trovare il loro punto di incidenza;
2. di trovare l'equazione del piano che le contiene;
3. di determinare le equazioni delle rette bisettrici degli angoli da esse individuate nel loro piano comune.

Risoluzione. Ci sono diversi modi di procedere per verificare che le due rette sono incidenti e trovare il loro punto di intersezione. Visto che le rette sono date una in equazioni parametriche e una in equazioni cartesiane, basterà sostituire le x, y, z date dalle formule parametriche della prima retta nelle equazioni dei due piani che individuano la seconda retta: si otterrà un sistema di due equazioni nell'unica incognita t. Se questo sistema ha 1 soluzione allora le due rette sono incidenti ma non coincidenti; se il sistema ha invece infinite soluzioni le due rette sono addirittura coincidenti. In questo caso si ottiene banalmente $t = -1$, che fornisce il punto $P = (1, 2, 1)$ come punto di intersezione.

Anche per trovare l'equazione del piano che contiene le due rette ci sono molte strategie possibili. Una consiste nel trovare le equazioni parametriche della seconda retta, per avere un suo vettore direttore, e anche per questo si possono seguire diverse strade. Se poniamo $z = t$, dalla prima equazione ricaviamo $x = -t + 2$ e dalla terza $y = -x + z + 2 = t - 2 + t + 2 = t$. Un vettore direttore direttore di questa retta è dunque $\vec{v} = (-1, 2, 1)$. La prima retta ha come vettore direttore $\vec{u} = (2, 1, -1)$. Il prodotto vettoriale $\vec{u} \wedge \vec{v}$ fornisce un vettore di giacitura per il piano cercato. Si ottiene facilmente

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k} .$$

L'equazione del piano è allora

$$3(x - 1) - 1(y - 2) + 5(z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x - y + 5z - 6 = 0 .$$

*http://www.batmath.it

[1] Questo esercizio era sostanzialmente identico nei quattro temi proposti.

Per trovare le equazioni delle due bisettrici richieste la strategia più semplice consiste nel trovare i versori di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e osservare che due possibili vettori direttori per le bisettrici richieste sono dati da

$$\mathrm{vers}(\vec{u}) + \mathrm{vers}(\vec{v}) \quad \text{e} \quad \mathrm{vers}(\vec{u}) - \mathrm{vers}(\vec{v})\,.$$

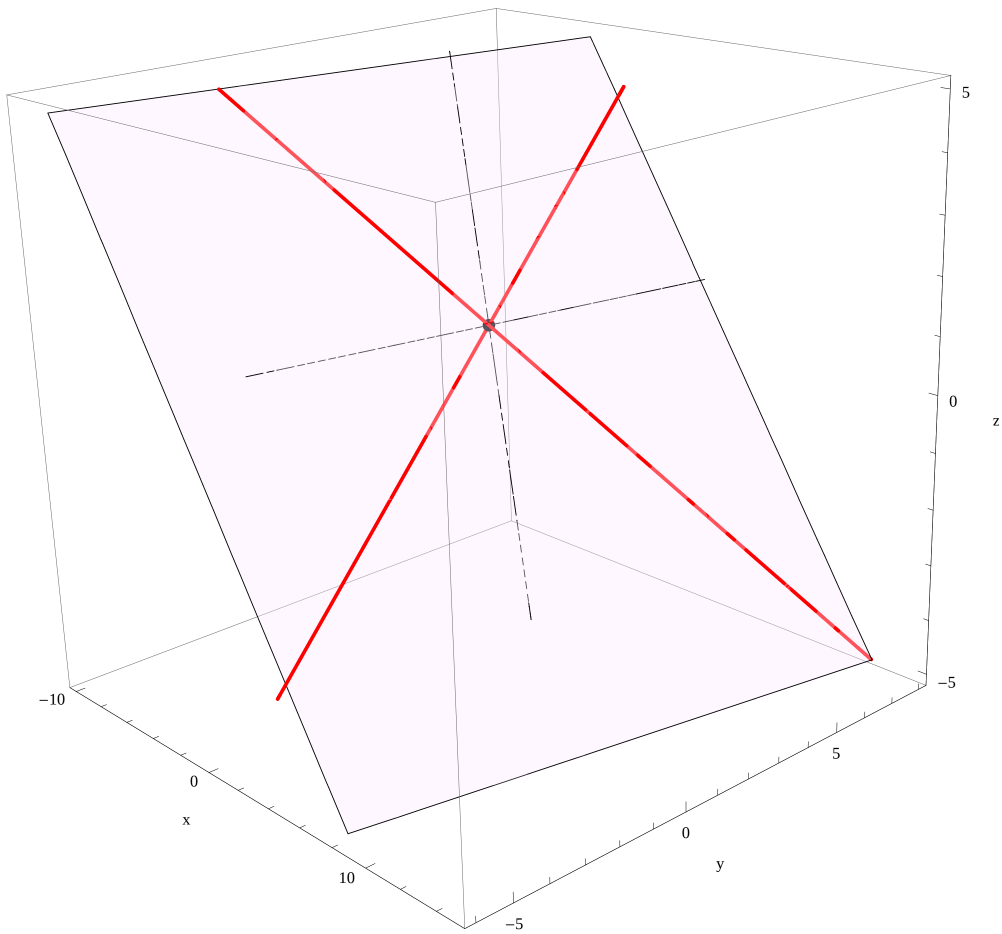
Si ottiene facilmente

$$\mathrm{vers}(\vec{u}) + \mathrm{vers}(\vec{v}) = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}\,,\,\frac{3}{\sqrt{6}}\,,0\right) \quad \text{e} \quad \mathrm{vers}(\vec{u}) - \mathrm{vers}(\vec{v}) = \left(\frac{3}{\sqrt{6}}\,,\,-\frac{1}{\sqrt{6}}\,,-\frac{2}{\sqrt{6}}\right).$$

Tenendo conto che le bisettrici devono, ovviamente, passare per il punto P sopra trovato, si ottengono le due equazioni:

$$\begin{cases} x = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,t \\ y = 2 + \dfrac{3}{\sqrt{6}}\,t \\ z = 1 \end{cases} \qquad , \qquad \begin{cases} x = 1 + \dfrac{3}{\sqrt{6}}\,t \\ y = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{6}}\,t \\ z = 1 - \dfrac{2}{\sqrt{6}}\,t \end{cases}$$

La figura seguente, ottenuta con *Mathematica*, illustra la soluzione del problema.



Esercizio 2. Sono[2] date la funzione di due variabili e la curva seguenti:

$$f(x,y) = x^2y - y + x^2\,, \qquad \begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^4 \end{cases}, t \in \mathbb{R}\,.$$

Si chiede:

1. di trovare l'equazione della retta s tangente alla curva nel punto $P(1,1,1)$;
2. di dimostrare che la curva giace interamente sulla superficie grafico della funzione $f(x,y)$;
3. di provare che la tangente s sopra trovata giace interamente nel piano tangente al grafico della funzione $f(x,y)$) nel punto $P(1,1,1)$.

Risoluzione. Innanzitutto osserviamo che il punto P si ottiene dalle equazioni parametriche della curva data in corrispondenza al valore $t = 1$ del parametro. Dopodiché per calcolare un vettore direttore della tangente richiesta basterà derivare le funzioni che compaiono nelle equazioni parametriche della curva:

$$\begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2t \\ z = 4t^3 \end{cases}, t \in \mathbb{R}\,.$$

Dalle equazioni parametriche e dalle derivate appena ottenute possiamo dedurre che la curva in questione è semplice, regolare e aperta.

Un vettore direttore della tangente s richiesta è allora $\vec{v} = (1,2,4)$, e l'equazione della tangente stessa, in forma parametrica, si può scrivere come segue:

$$\begin{cases} x = 1 + u \\ y = 1 + 2u \\ z = 1 + 4u \end{cases}.$$

La verifica che la curva giace sulla superficie grafico della funzione è immediata. La superficie grafico ha equazione

$$z = x^2y - y + x^2\,.$$

Sostituendo le tre funzioni t, t^2, t^4 al posto di x, y, z si ottiene un'identità in t, che attesta il fatto che la curva giace sulla superficie, per ogni valore di t.

Per trovare l'equazione del piano tangente alla superficie grafico calcoliamo le derivate parziali della funzione f:

$$f'_x(x,y) = 2xy + 2x\,, \quad f'_y(x,y) = x^2 - 1 \quad \Rightarrow \quad f'_x(1,1) = 4\,, \quad f'_y(1,1) = 0\,.$$

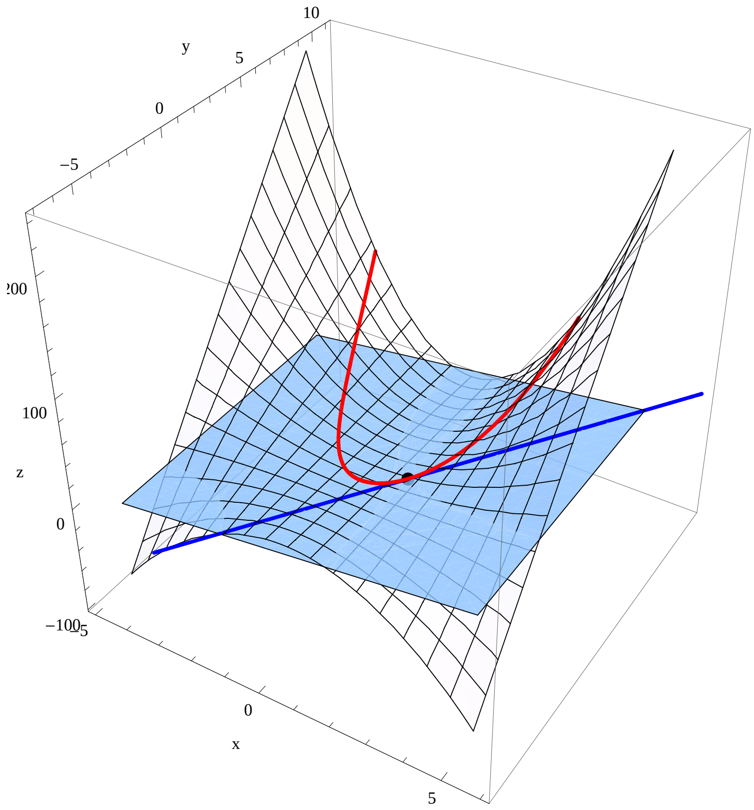
L'equazione del piano tangente è allora

$$z = f(1,1) + f'_x(1,1)(x-1) + f'_y(1,1)(y-1) \quad \Rightarrow \quad z = 4x - 3\,.$$

Anche la verifica che la retta tangente giace in questo piano è elementare: basta sostituire i valori di x, y, z, dati dalle equazioni parametriche della retta, nell'equazione del piano appena trovata, per verificare che si ottiene un'identità in u.

La figura seguente, ottenuta con *Mathematica*, illustra la soluzione del problema.

[2] Questo esercizio era sostanzialmente identico nei quattro temi proposti.



Esercizio 3. Calcolare l'insieme di tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^3 + x}\,.$$

N.B.:Prestare attenzione alla scelta delle costanti.

Risoluzione. La funzione integranda è razionale fratta e la sua scomposizione in fratti semplici è elementare:

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x^3+x}\,.$$

Si ottiene subito $A = 1$, $B = -1$, $C = 0$, da cui si deduce

$$\frac{1}{x^3+x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+1}\,.$$

Una delle primitive richieste è allora

$$g(x) = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$$

L'insieme di tutte le primitive si può quindi scrivere come

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} g(x) + c_1, & \text{se} \quad x < 0 \\ g(x) + c_2, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases}\,,$$

con c_1 e c_2 costanti arbitrarie.

Esercizio 4. Calcolare l'insieme di tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x}.$$

N.B.:Prestare attenzione alla scelta delle costanti.

Risoluzione. Si ragiona esattamente come nell'esercizio 3. Riportiamo solo il risultato finale.

$$g(x) = \ln|x| - \ln|x+1|, \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} g(x) + c_1, & \text{se} \quad x < -1 \\ g(x) + c_2, & \text{se} \quad -1 < x < 0 \\ g(x) + c_3, & \text{se} \quad x > 0 \end{cases},$$

con c_1, c_2 e c_3 costanti arbitrarie.

Esercizio 5. Calcolare l'insieme di tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}.$$

N.B.:Prestare attenzione alla scelta delle costanti.

Risoluzione. Si ragiona esattamente come nell'esercizio 3. Riportiamo solo il risultato finale.

$$g(x) = -\ln|x| + \ln|x-1|, \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} g(x) + c_1, & \text{se} \quad x < 01 \\ g(x) + c_2, & \text{se} \quad 0 < x < 1 \\ g(x) + c_3, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases},$$

con c_1, c_2 e c_3 costanti arbitrarie.

Esercizio 6. Calcolare l'insieme di tutte le primitive della funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}.$$

N.B.:Prestare attenzione alla scelta delle costanti.

Risoluzione. Si ragiona esattamente come nell'esercizio 3. Riportiamo solo il risultato finale.

$$g(x) = \frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\ln|x+1|, \qquad \int f(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} g(x) + c_1, & \text{se} \quad x < -1 \\ g(x) + c_2, & \text{se} \quad -1 < x < 1 \\ g(x) + c_3, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases},$$

con c_1, c_2 e c_3 costanti arbitrarie.