Tema di Analisi I, 2° modulo, $01/04/2010$

Luciano Battaia(*)

Università di Udine e Università di Trieste, Sede di Pordenone

Esercizio 1.

1. Scrivere l'equazione della superficie sferica $\mathcal{S}$ di centro $C(1,1,2)$ e raggio $R=\sqrt{3}$.
2. Trovare l'equazione del piano α tangente alla sfera $\mathcal{S}$ nel punto $P(2,2,1)$.
3. Trovare il centro A e il raggio r della circonferenza $\mathcal{C}$ intersezione tra la sfera $\mathcal{S}$ e il piano β per P parallelo al piano Oxy.
4. Trovare le equazioni parametriche della retta s tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$ in P.
5. Trovare le equazioni parametriche della retta p, perpendicolare a s per P e giacente su α.

Risoluzione. L'equazione della superficie sferica è:

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=3\,,$$

che, dopo elementari semplificazioni, si riduce a

$$x^2+y^2+z^2-2x-2y-4z+3=0\,.$$

Anche l'equazione del piano tangente si trova facilmente usando la "formula di sdoppiamento":

$$xx_0+yy_0+zz_0+a(x+x_0)+b(y+y_0)+c(z+z_0)+d=0\,,$$

dove $x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$ è l'equazione della sfera e (x_0,y_0,z_0) è il punto di tangenza. Si ottiene facilmente

$$x+y-z-3=0$$

Il centro A della circonferenza $\mathcal{C}$ ha chiaramente l'ascissa e l'ordinata di C, mentre la terza coordinata deve essere quella di P, dunque $A=(1,1,1)$. Il raggio r si può trovare facendo la distanza tra A e P:

$$\overline{AP}=\sqrt{(x_A-x_P)^2+(y_A-y_P)^2+(y_A-y_P)^2}=\sqrt{2}\,.$$

Per quanto riguarda la tangente s, basta osservare che una sua equazione cartesiana è semplicemente data dall'intersezione tra i piani α e β:

$$s\colon\ \begin{cases} x+y-z-3=0 \\ z=1 \end{cases}\,.$$

*http://www.batmath.it

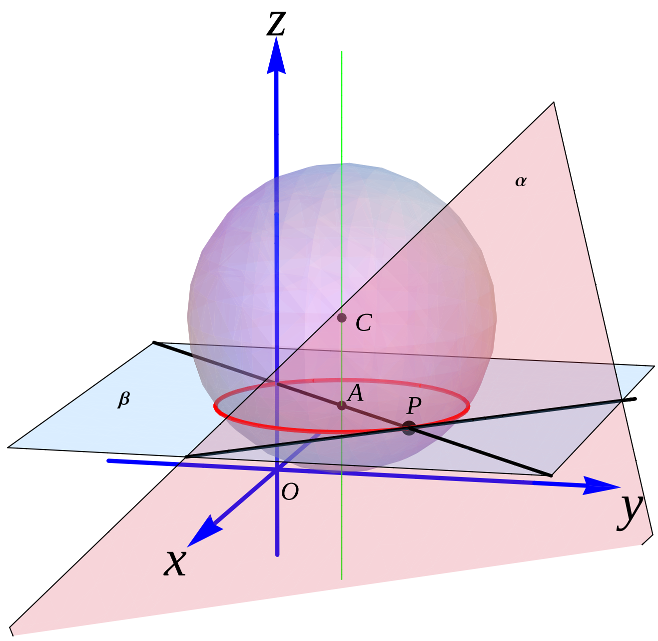
Da questa coppia di equazioni cartesiane si ottengono le seguenti equazioni parametriche ponendo, ad esempio, $x = t$:

$$s\colon \begin{cases} x = t \\ y = -t + 4 \\ z = 1 \end{cases} .$$

La determinazione della retta normale p richiesta si può fare, tra gli altri modi, osservando che un suo vettore direttore è $\overrightarrow{AP}$ e che deve passare per A:

$$p\colon \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \\ z = 1 \end{cases} .$$

La figura seguente, ottenuta con *Mathematica*, illustra la situazione.



Il codice seguente è quello utilizzato in *Mathematica* per la produzione della figura.

```
Show[
 ContourPlot3D[
  x^2 + y^2 + z^2 - 2 x - 2 y - 4 z + 3 == 0, {x, -2, 4}, {y, -2,
   4}, {z, -1, 5}, Mesh -> None, ContourStyle -> Opacity[0.6],
  Boxed -> False, Axes -> False, ViewPoint -> {10, 2.4, 2}],
 Graphics3D[{{PointSize[Large], Point[{2, 2, 1}]}, {PointSize[Medium],
     Point[{1, 1, 2}]}, {PointSize[Medium], Point[{1, 1, 1}]}}],
 Plot3D[x + y - 3, {x, -2, 4}, {y, -2, 4}, Mesh -> None,
  PlotStyle -> Opacity[0.5]],
 Plot3D[1, {x, -2, 4}, {y, -2, 4}, Mesh -> None,
  PlotStyle -> Opacity[0.5]],
 ParametricPlot3D[{1 + Sqrt[2] Cos[t], 1 + Sqrt[2] Sin[t], 1}, {t, 0,
   2 Pi}, PlotStyle -> {Red, Thick}],
 ParametricPlot3D[{1, 1, t}, {t, -1, 5}, PlotStyle -> {Green}],
 Graphics3D[{Blue, Thick, Arrow[{{-2, 0, 0}, {4, 0, 0}}],
```

```
   Arrow[{{0, -2, 0}, {0, 4, 0}}], Arrow[{{0, 0, -1}, {0, 0, 5}}]}],
 ParametricPlot3D[{t, -t + 4, 1}, {t, -2, 4},
  PlotStyle -> {Thickness[0.005]}],
 ParametricPlot3D[{1 + t, 1 + t, 1}, {t, -3, 3},
  PlotStyle -> {Thickness[0.005]}],
 Graphics3D[{Text[Style[x, Large], {4.5, 0, 0}],
   Text[Style[y, Large], {0, 4.1, -0.2}],
   Text[Style[z, Large], {0, 0, 5.2}],
   Text[Style[P, Medium], {2.2, 2.1, 1.3}],
   Text[Style[C, Medium], {1.2, 1.3, 2}],
   Text[Style[A, Medium], {1.2, 1.2, 1.2}],
   Text[Style[O, Medium], {0.2, 0.2, -0.2}],
   Text[Style[\[Alpha], Bold], {4.2, 3.7, 4.2}],
   Text[Style[\[Beta], Bold], {2.2, -1.2, 1.2}]}]
 ]
```

Esercizio 2. Sia data la funzione f definita da

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & \text{se} \quad x\neq 0\\ 1, & \text{se} \quad x=0\end{cases},$$

e si consideri la funzione integrale definita ponendo

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Calcolare, usando la regola di l'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-x}{F(3x)-3F(x)}\,.$$

Risoluzione. Il limite proposto si presenta chiaramente nella forma indeterminata $0/0$: seguendo l'indicazione del testo applichiamo la regola di l'Hôpital, osservando che, per il teorema fondamentale del calcolo integrale,

$$F'(x)=f(x)=\frac{\sin x}{x},\quad F'(3x)=f(3x)\cdot 3=3\,\frac{\sin 3x}{3x}\,,$$

in quanto, nel calcolo del limite, possiamo supporre $x\neq 0$. Si ha allora:

$$\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-x}{F(3x)-3F(x)}\overset{(H)}{\Leftarrow}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin x}{x}-1}{3\,\dfrac{\sin 3x}{3x}-3\,\dfrac{\sin x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{\sin 3x-3\sin x}=\cdots=\frac{1}{24}\,,$$

dove abbiamo tralasciato i calcoli espliciti per l'ultimo limite, calcoli standard (per esempio applicando ancora la regola di l'Hôpital).i quanto

Esercizio 3. Siano date la curva

$$\gamma\colon\begin{cases}x &= f(t) &= \cos t\\ y &= g(t) &= 2\sin t\end{cases},\quad t\in[0,2\pi[$$

e la funzione $F(x,y)=\sin x+4xy^2$.

Calcolare la funzione derivata della funzione composta

$$F\big(f(t), g(t)\big)$$

sia direttamente che usando la regola di derivazione della funzioni composte. Spiegare perché la regola di derivazione delle funzioni composte è applicabile.

Risoluzione. Il calcolo diretto si può fare "sostituendo" esplicitamente le funzioni f e g al posto di x ed y in F:

$$G(t) = F\big(f(t), g(t)\big) = \sin(\cos t) + 4\cos t(2\sin t)^2 = \sin(\cos t) + 16\cos t\sin^2 t.$$

Da qui si ottiene

$$G'(t) = \cos(\cos t)(-\sin t) - 16\sin^3 t + 32\cos^2 t\sin t = -\sin t\cos(\cos t) - 16\sin^3 t + 32\cos^2 t\sin t\,.$$

La regola di derivazione delle funzioni composte (applicabile perché la funzione F è differenziabile e le funzioni f e g sono derivabili) richiede prima il calcolo delle derivate parziali di F:

$$F'_x = \cos x + 4y^2, \quad F'_y = 8xy\,.$$

Successivamente si ha:

$$\begin{aligned} G'(t) &= F'_x(\big(f(t), g(t)\big)f'(t) + F'_y\big(f(t), g(t)\big)g'(t) = \\ &= \big(\cos(\cos t) + 4(2\sin t)^2\big)(-\sin t) + \big(8\cos t\, 2\sin t\big)(2\cos t)\,, \end{aligned}$$

che è esattamente lo stesso risultato di prima.